ÍNDICE

I. ÁLGEBRA 2

Es increíble que la matemática, habiendo sido creada por la mente humana, logre describir la naturaleza con tanta precisión.

Albert Einstein

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

Nikolai Lobachevski

1.1. POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión algebraica que cuenta con más de un término o monomio. Los polinomios están formados por términos finitos. Cada término contiene uno o más de los siguientes tres elementos: variables, constantes y exponentes.

A. MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Regla para multiplicar un polinomio con un monomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, respetando las leyes de los exponentes y las leyes de los signos.

Ejemplo 1

$$x^5 - 6x^3 - 8x \qquad por \qquad 3a^2x^2$$

$$\begin{aligned}(x^5 - 6x^3 - 8x\ )\ 3a^2x^2 &= x^5(3a^2x^2) - 6x^3(3a^2x^2) - 8x(3a^2x^2)\\ &= 15a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3\end{aligned}$$

En forma simplificada

$$\begin{array}{c} x^5 - 6x^3 - 8x \\ 3a^2x^2 \\ \hline \mathbf{15a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3} \end{array}$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2 \\ \frac{3}{2}y^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3}{6}x^2y^3 - \frac{6}{10}xy^4 - \frac{3}{8}y^5 = \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{3}{5}xy^4 - \frac{3}{8}y^5}$$

Ejemplo 3

$$\begin{array}{c} 3a - 5b + 6c \\ -\frac{3}{10}a^2x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$-\frac{9}{10}a^3x^3 + \frac{15}{10}a^2bx^3 - \frac{18}{10}a^2cx^3 = \boldsymbol{-\frac{9}{10}a^3x^3 + \frac{3}{2}a^2bx^3 - \frac{9}{5}a^2cx^3}$$

Regla para multiplicar dos polinomios

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos, la ley de los exponentes y la reducción de términos semejantes.

Ejemplo 1

$$3x - 2y \quad por \quad y + 2x$$

$$(3x - 2y)y = 3x(y) - 2y(y) = 3xy - 2y^2$$

$$(3x - 2y)2x = 3x(2x) - 2y(2x) = 6x^2 - 4xy$$

$$3xy - 2y^2 + 6x^2 - 4xy$$

$$\mathbf{6x^2 - xy - 2y^2}$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{c} x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\ 2x + 3 \\ \hline 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 3x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \\ \mathbf{2x^4 - x^3 + 7x - 3} \end{array}$$

Ejemplo 3

$$\begin{array}{c} x - \frac{2}{5}y \\ \frac{5}{6}y + \frac{1}{3}x \\ \hline \frac{5}{6}xy - \frac{10}{30}y^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}xy \end{array}$$

$$\frac{5}{6}xy - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}xy$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2}$$

Regla para multiplicar más de dos polinomios

Primero se multiplican dos polinomios; el resultado se multiplica con el polinomio restante y así sucesivamente, siguiendo las reglas que se describieron anteriormente.

Practiquemos…

Resuelve las siguientes multiplicaciones de polinomios.

1) $x * x^2 =$
2) $-2x^7 * 5x^{-2} =$
3) $5x(x^2 + x - 2) =$
4) $(2x + 7)(x + 1) =$
5) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 2) =$
6) $(a - 4)(a + 3)(a + 2)(a - 1) =$

B. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Regla para dividir un polinomio entre un monomio

Se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio, respetando las leyes de los signos y de los exponentes. Posteriormente, de ser necesario, se realiza una reducción de términos semejantes.

Ejemplo 1

$$4x^8 - 10x^6 - 5x^4 \quad entre \quad 2x^3$$

$$(4x^8 - 10x^6 - 5x^4) \div 2x^3 = 4x^8 \div (2x^3) - 10x^6 \div (2x^3) - 5x^4 \div (2x^3)$$

$$= \mathbf{2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x}$$

Ejemplo 2

$$\frac{2}{5}a^5 - \frac{1}{3}a^3b^3 - ab^5$$

$$\div \quad 5a$$

$$\mathbf{\frac{2}{25}a^4 - \frac{1}{15}a^2b^3 - \frac{1}{5}b^5}$$

Ejemplo 3

$$3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3$$

$$\div \quad -2a$$

$$-\frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{2}b^2 + 3ab^3$$

Regla para dividir dos polinomios

1. Se ordenan de forma descendiente los términos del dividendo y del divisor.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. El resultado será el **primer término del cociente.**
3. Se multiplica el primer término del cociente por el polinomio divisor; el resultado se pone con signo contrario abajo del dividendo (con su respectivo término semejante) y se resta.
4. Del resultado de la resta se repiten los pasos 2 y 3 para obtener el **segundo término del cociente**.
5. Se repite el procedimiento sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo 1

$$x^2 - 20 + x \quad entre \quad x + 5$$

Paso 1

$x^2 + x - 20$ $\qquad$ $x + 5$

Paso 2

$x^2 \div x = x$

X es el primer término del cociente

Paso 3

$(x + 5)(x) = x^2 + 5x$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 20 \\ -x^2 - 5x \qquad \\ \hline 0 - 4x - 20 \end{array}$$

Paso 2

$-4x \div x = -4$

-4 es el segundo término del cociente.

Paso 3

$(x + 5)(-4) = -4x - 20$

$$\begin{array}{r} -4x - 20 \\ +4x + 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Los términos del cociente de la división son $\boldsymbol{x - 4}$

Ejemplo 2

$$3y^5 + 5y^2 - 12y + 10 \quad entre \quad y^2 + 2$$

$$3y^5 \div y^2 = 3y^3$$
$$(y^2 + 2)(3y^3) = 3y^5 + 6y^3$$

$$\begin{array}{l} 3y^5 + 5y^2 - 12y + 10 \\ -3y^5 - 6y^3 \\ \hline 0 - 6y^3 \ + 5y^2 - 12y + 10 \end{array}$$

$$-6y^3 \div y^2 = -6y$$
$$(y^2 + 2)(-6y) = -6y^3 - 12y$$

$$\begin{array}{l} -6y^3 \ + 5y^2 - 12y + 10 \\ +6y^3 \qquad\qquad + 12y \\ \hline 0 + 5y^2 + 10 \end{array}$$

$$5y^2 \div y^2 = 5$$
$$(y^2 + 2)(5) = 5y^2 + 10$$

$$\begin{array}{c} +5y^2 + 10 \\ -5y^2 - 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

Los términos del cociente de la división son $\mathbf{3y^3 - 6y + 5}$

Ejemplo 3

$$\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2 \qquad entre \qquad \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{6}a^2 \div \frac{1}{3}a = \frac{3}{6}a = \frac{1}{2}a$$

$$(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b)(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{4}ab$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2 \\ -\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{4}ab \\ \hline 0 - \frac{1}{9}ab - \frac{1}{6}b^2 \end{array}$$

$$-\frac{1}{9}ab \div \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}b$$

$$(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b)(-\frac{1}{3}b) = -\frac{1}{9}ab - \frac{1}{2}b^2$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{9}ab - \frac{1}{6}b^2 \\ \frac{1}{9}ab + \frac{1}{2}b^2 \\ \hline \frac{1}{3}b^3 \end{array}$$

En este caso, el residuo no es cero. Sin embargo, como el término es de un grado menor que el dividendo, se termina el procedimiento (es una expresión inexacta).

Los términos del cociente de la división son $\boldsymbol{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b}$

Practiquemos…

Resuelve las siguientes divisiones de polinomios.

1) $(x^2 - 4x + 3) \div (x - 1) =$
2) $(3x^2 + x - 5) \div (x - 2) =$
3) $(6x^5 - 3x^4 + 2x) \div (x + 1) =$
4) $(x^3 - x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + x - 1) =$

1.2. ECUACIONES LINEALES

Realiza las siguientes actividades:

1) Completa la tabla.

Expresión común	Expresión algebraica
El triple de un número más la mitad de éste.	
El cuádruple de la semisuma de tres números.	

2) Lee el siguiente caso y completa la tabla.

Ramiro tiene un restaurante de mariscos. La semana pasada vendió 36 platillos; algunos tienen un costo de \$800 y otros de \$500. Si en total cobró \$24,000, ¿cuántos platillos de cada tipo vendió?	
a) La variable en el problema es:	
b) ¿Qué datos del problema desconoces?	
c) ¿Qué datos del problema conoces?	
d) ¿Como resolverías el problema?	

3) Plantea con una ecuación la siguiente situación y responde la pregunta.

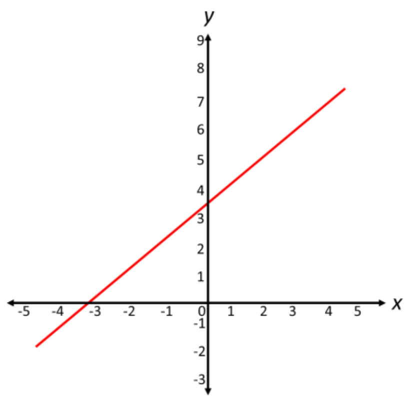
Isaac tiene una cuerda de 40 cm y formó un rectángulo con ella. ¿Cuánto mide el área del rectángulo si x = 4?	

En el volumen 1 de los recursos de reforzamiento en matemáticas, se trataron los temas de lenguaje y/o expresiones algebraicas, así como la manera de identificar la ecuación que modela un fenómeno o una situación cotidiana. En este volumen se explica cómo identificar, plantear e interpretar una situación mediante sistemas de ecuaciones lineales.

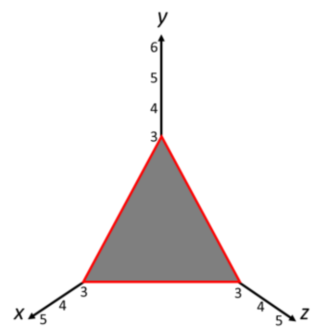
A. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir que las incógnitas no están elevadas a potencias, ni multiplicadas entre sí, ni en el denominador. Por ejemplo, **3x + 2y + 6z = 6** es una ecuación lineal con **tres incógnitas** (*x, y, z*).

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas representan una recta en el plano. Si la ecuación lineal tiene tres incógnitas, su representación gráfica es un plano en el espacio. Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones o geométricamente representan la misma recta o plano.



ECUACIÓN LINEAL CON 2 INCÓGNITAS



ECUACIÓN LINEAL CON 3 INCÓGNITAS

Los sistemas de ecuaciones más sencillos son aquellos en los que sólo hay dos incógnitas y dos ecuaciones. La solución del sistema se limita a estudiar la posición de dos rectas en el plano. Hay varios sistemas para resolverlos; los más habituales son:

- ✓ Reducción
- ✓ Igualación
- ✓ Sustitución

- **Por reducción**

$$x + 2y = -3$$
$$-2x + y = 1$$

$2x + 4y = -6$

$-2x + y = 1$

$5y = -5$

Donde $\boldsymbol{y = 1}$ y sustituyendo: $x + 2(-1) = -3$, $\boldsymbol{x = -1}$

La solución del sistema es única (x = -1, y = -1), lo que significa que el sistema es compatible y determinado. Las rectas se cortan en un punto (-1,-1).

- **Por igualación**

$$x + 2y = -3$$
$$-2x - 4y = 5$$

$x = -3 - 2y$

$x = \dfrac{5 + 4y}{-2}$ Donde $-3 - 2y = \frac{5+4y}{-2} \Rightarrow 4y + 6 = 5 + 4y \Rightarrow \mathbf{0y = -1} \Rightarrow \mathbf{0 = -1}$

El sistema no tiene solución; es un sistema incompatible. Las rectas son paralelas.

- **Por sustitución**

$$x + 2y = -3$$
$$3x + 6y = -9$$

Como $x = -2y - 3$
resulta $3(-2y - 3) + 6y = -9$
es decir $-6y - 9 + 6y = -9$
entonces $0y = 0$, $\mathbf{0 = 0}$

Como 0 = 0 es una igualdad siempre cierta, el sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado o las rectas son la misma.

B. SISTEMAS DE ECUACIONES Y SITUACIONES COTIDIANAS

Muchos problemas o situaciones de la vida cotidiana se pueden resolver mediante el planteamiento de ecuaciones. Por eso es necesario que ejercites el pensamiento matemático y el lenguaje algebraico.

Ejemplo
Para identificar la ecuación que modela una situación

Hoy compré 3 canicas de cristal y 2 de acero por $130; ayer compré 2 de cristal y 5 de acero por $215. Determina el precio de una canica de cristal y el de una de acero.

Paso 1. Identifica las palabras clave y extrae los datos.
Paso 2. Escribe las incógnitas y asigna los valores según corresponda.
Paso 3. Escribe los términos en una ecuación.

Paso 1

Son dos tipos de canicas, cristal y acero. Eso significa que hay dos variables.
Se hicieron dos compras. Eso significa que hay dos ecuaciones.
En la primera compra se gastó $130 y en la segunda $215.

Paso 2

c = número de canicas de cristal
a = número de canicas de acero

Paso 3

$$3c + 2a = 130$$
$$2c + 5a = 215$$

Para comprobar, puedes resolver el sistema de ecuaciones por cualquiera de los métodos.

Ejemplo

Para inferir una situación a partir de un sistema de ecuaciones

Suponiendo que ***p*** representa el número de patos y ***v*** el número de vacas, ¿cómo se interpreta el siguiente sistema de ecuaciones en lenguaje común?

$$p + v = 132$$
$$2p + 4v = 402$$

Paso 1. Identifica las variables:

$$\boldsymbol{p} = patos$$
$$\boldsymbol{v} = vacas$$

Paso 2. Identifica las operaciones matemáticas.

Son dos **sumas**.

Paso 3. Interpreta cada una de las ecuaciones del sistema.

$$p + v = 132 \leftarrow \boxed{\mathbf{a}}$$
$$2p + 4v = 402 \leftarrow \boxed{\mathbf{b}}$$

La ecuación **a** muestra la suma de patos y vacas, que da en total 132 animales.

La ecuación **b** se puede referir a varias cosas, pero, si observamos los datos, podemos inferir que los valores de los coeficientes corresponden con el número de patas de los animales. Por tanto, se puede decir que la suma de patas es 402.

Practiquemos…

Determina el sistema de ecuaciones que modele la situación o interprete en lenguaje común un sistema de ecuaciones, según corresponda.

1) **Se necesitan 200 kg al día para alimentar a las gallinas y los gallos. Hay un gallo por cada seis gallinas y se sabe que una gallina come una media de 500 g, el doble que un gallo.**

Paso 1

Paso 2

Paso3

2) **Interpreta el siguiente sistema de ecuaciones.**

$$\boldsymbol{m = 3p}$$
$$\boldsymbol{m + 15 = 2(p + 15)}$$

Paso 1

Paso 2:

Paso3:

1.3. VARIABLES Y GRÁFICAS

Las cantidades que intervienen en una relación matemática son **constantes** cuando tienen un valor fijo y determinado (nunca cambia) y **variables** cuando su valor cambia.

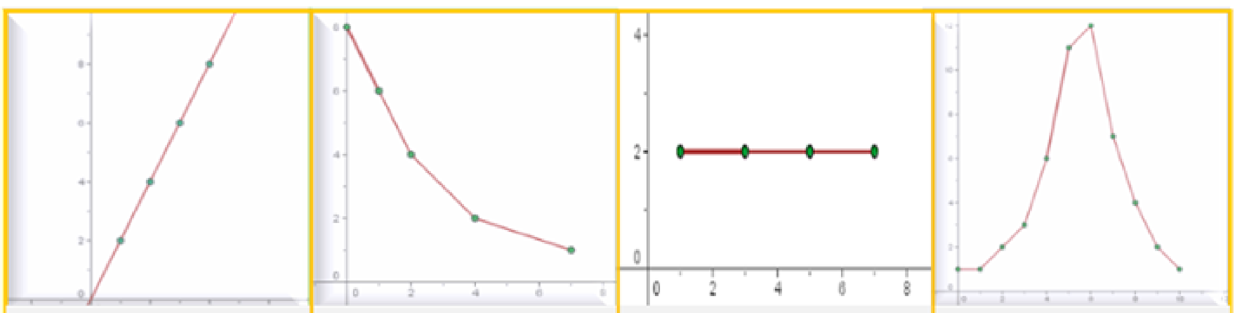
Existen dos tipos de variables:

I. **Independiente**: Su valor no depende de ninguna otra variable; se representa principalmente con la letra “**x**” en una función. En el plano cartesiano, se representa en el eje de las abscisas (eje horizontal) con la letra “**x**” como símbolo.

II. **Dependiente:** Es aquella cuyos valores dependen de los valores que tome otra variable. En las funciones se representa principalmente con la letra “**y**”; se presenta en el eje de las ordenadas (eje vertical) del plano cartesiano.

> La variable **“y”** se desarrolla o está en función de la variable **“x”**.

Las **gráficas** son la representación de la relación que hay entre la variable dependiente y la independiente. Hay varios modelos de graficas, que dependen del tipo de relación entre las variables.

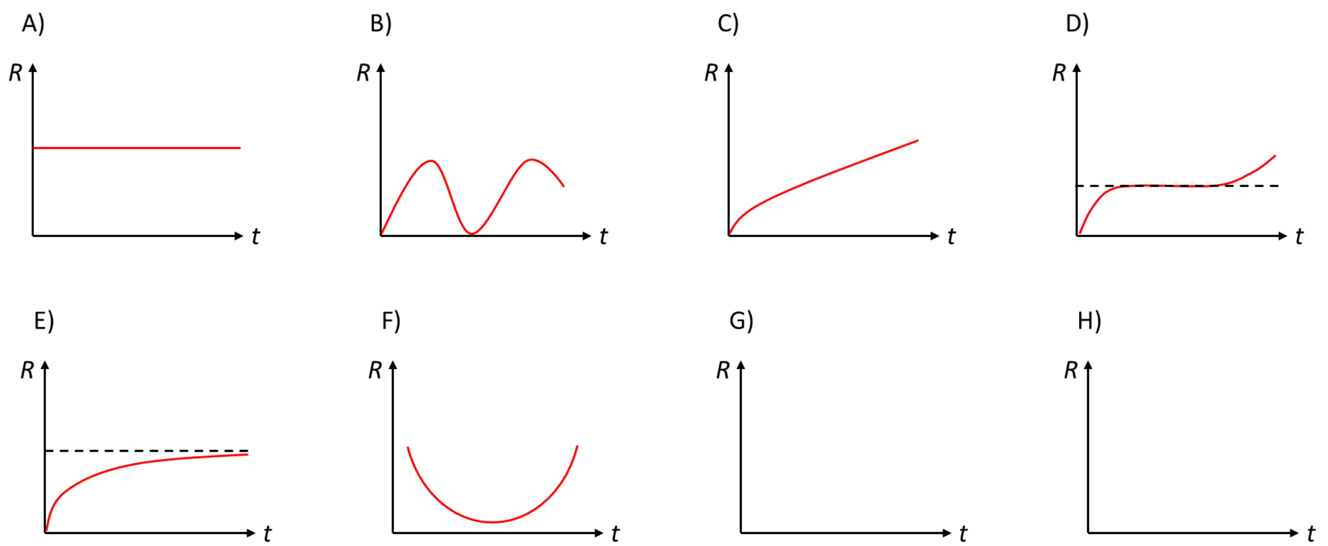


CRECIENTE	DECRECIENTE	CONSTANTE	CRECIENTE Y DECRECIENTE
Si aumenta la variable independiente, aumenta la variable dependiente.	Cuando la variable independiente aumenta, la dependiente disminuye.	Cuando la variable independiente cambia a no dependiente.	Los cambios no siguen un patrón determinado.

Practiquemos…

Analiza la siguiente situación y resuelve lo que se solicita.

Itzel y Diego prepararon para su clase de Ciencias una exposición sobre distintos esquemas de evolución del universo (incluyendo algunos ya descartados por los cosmólogos actuales, pero de cierto interés histórico) e hicieron gráficas que muestran cómo podría estar cambiando el radio del universo (*R*) con el tiempo (*t*).

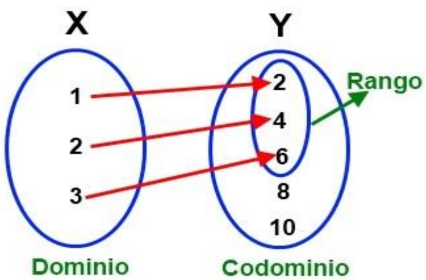


1. Completa la tabla relacionando las gráficas con sus descripciones.
2. Bosqueja las gráficas de los modelos III y V.
3. Escribe tus conclusiones del tema.

MODELO	DESCRIPCIÓN	GRÁFICA
I	El universo primero se comprime y después se dilata.	
II	Universo abierto: se expande sin límite.	
III	Universo cerrado: primero se expande y después se contrae.	H
IV	Universo pulsante: se expande y se contrae una y otra vez.	
V	El universo se expande de manera directamente proporcional al tiempo.	G
VI	El universo se expande cada vez más lentamente, aproximándose a un radio límite.	
VII	Universo estacionario: su tamaño siempre permanece igual.	
VIII	El universo se expande, permanece estacionario cierto tiempo y después continúa su expansión.	

1.4. RELACIONES Y FUNCIONES

Las relaciones y las funciones parten de la teoría de conjuntos. Ésta define el **conjunto** como cualquier colección (***C***) de objetos determinados y distintos (***x***), según nuestra percepción o pensamiento, reunidos en un todo. Estos objetos se denominan elementos de C.



Se define como **relación** a la correspondencia de dos conjuntos —uno llamado ***dominio*** y el segundo llamado ***codominio*** o imagen—, en la cual a cada elemento del domino corresponde uno o más elementos del codominio.

Una **función** es una relación que asigna a cada elemento del dominio un elemento específico del codominio; los valores de la función determinan **el rango** de ésta. Generalmente se representa $f(x)$.

> Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

TIPOS DE FUNCIONES

A. Función de una sola variable. Se presenta cuando el valor de una variable "Y" depende de una sola variable "X".

Por ejemplo, si un automóvil va a una velocidad de 6 m/s, la distancia que recorrerá dependerá del tiempo que el automóvil se encuentre en movimiento. En este caso, el tiempo es la variable independiente, la distancia la variable dependiente y la velocidad es la constante.

B. Función de varias variables. Se presenta cuando el valor de una variable "Y" depende del valor de dos o más variables independientes.

Tomemos como ejemplo el mismo automóvil que va a una velocidad de 6 m/s, pero consideremos que, por cada 3.5 km que recorre, gasta un litro de gasolina. Ahora, la distancia que recorra el automóvil dependerá del tiempo que se encuentre en movimiento y de la cantidad de gasolina que tenga.

C. **Funciones algebraicas.** Son aquellas cuyo valor se puede obtener mediante un número finito de operaciones algebraicas.

- Función racional
- Función irracional
- Función entera
- Función polinómica
- Funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas

Ejemplo de función	Clasificación
$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 3}$	Polinómica
$\boldsymbol{f(x) = \frac{6x+3}{x^2-1}}$	Racional
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2+7}}$	Irracional
$\boldsymbol{f(x) = \log_5 x}$	Transcendente
$\boldsymbol{f(x) = \sin 2x}$	Transcendente
$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 8}$	Entera

DETERMINAR EL VALOR DE UNA FUNCIÓN

Cuando se tiene una función definida por una fórmula, se puede determinar su valor asignando un valor específico a ***x*** (el dominio de la función). Es decir, se tiene que evaluar la fórmula que define la función en un número o punto específico.

Ejemplos
Para resolver, se sustituye el valor que se asigne a ***x*** (la variable independiente) en la función y se realizan las operaciones correspondientes.

Ejemplo 1
Determina el valor de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2-6x}}$ cuando $\boldsymbol{f(3)}$

$$f(3) = \frac{1}{2-6(3)} = \frac{1}{2-18} = -\boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

Ejemplo 2
Determina el valor de la función $\boldsymbol{f(x) = 3x - 1}$ cuando $\boldsymbol{f(a+1)}$

$$f(a+1) = 3(a+1) - 1$$
$$f(a+1) = 3a + 3 - 1$$
$$\boldsymbol{f(a+1) = 3a + 2}$$

Ejemplo 3
Determina el valor de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3}$ cuando $\boldsymbol{f(-3)}$

$$f(-3) = (-3)^2 - 3$$
$$f(-3) = 9 - 3$$
$$\boldsymbol{f(-3) = 6}$$

IDENTIFICAR LA FUNCIÓN LINEAL QUE MODELA UN FENÓMENO

En las funciones, como en la vida real, todo se trata de relaciones. Las funciones no sólo nos ayudan a entender y solucionar problemas matemáticos, sino que también nos permiten comprender los fenómenos que suceden a nuestro alrededor.

Para modelar un fenómeno se puede utilizar una **ecuación**, una **tabla** o una **gráfica**.

Ejemplo:

En un poblado de Canadá nevó durante la noche y, al amanecer, había 40 cm de nieve sobre el suelo. Afortunadamente, al día siguiente incrementó la temperatura y se derritieron 5 cm de nieve; ese patrón siguió diariamente hasta que la nieve desapareció.

Se solicita determinar la función que modela la relación que hay entre los días que han pasado y la nieve que se ha derretido.

Paso 1. Determinar la ecuación

Se definen las variables independiente y dependiente, y la relación que existe entre ambas.
x = los días
y = los cm de nieve derretidos

$$\boldsymbol{y = 40 - 5x}$$

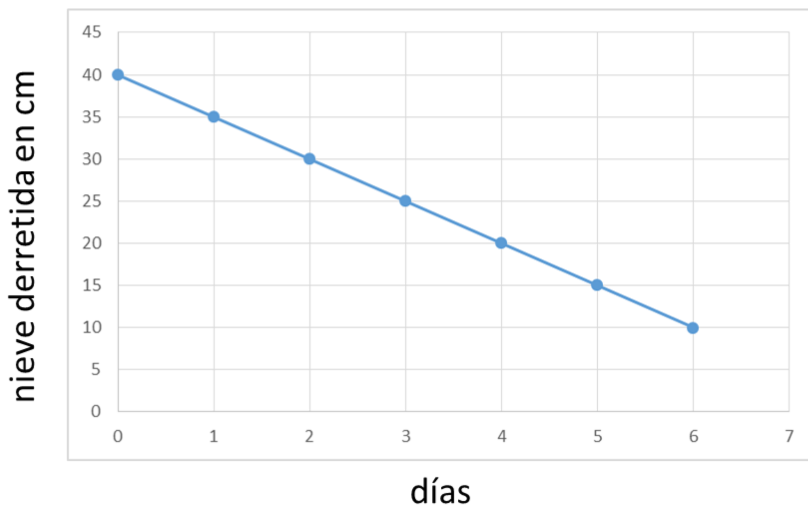
Paso 2. Obtener el valor de la función

Se muestra el número de días transcurridos y la cantidad de nieve restante.

Días	Nieve cm
0	40
1	35
2	30
3	25
4	20
5	15
6	10

Paso 3. Graficar los datos:

Se expresa la relación que existe entre las variables independiente y dependiente.



Practiquemos…

Determina la función y utiliza una ecuación, una tabla y una gráfica para modelar la siguiente situación.

Gabriela lanzó una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s desde una altura *h* de un metro medido a partir del suelo. La velocidad fue disminuyendo conforme subía ¾ m/s, a qué altura del suelo comenzó a caer la pelota.

Ecuación:

Tabla:

Gráfica:

OPERACIONES CON FUNCIONES

Con dos números podemos realizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias para obtener uno nuevo, y lo mismo pasa con las funciones: se pueden realizar estas operaciones para obtener una nueva función.

Ejemplo:

Realiza la suma de las siguientes dos funciones: $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f + g)(x) = \frac{3}{x - 2} + \sqrt{x}$$

Practiquemos…

A partir de las siguientes funciones, realiza las operaciones que se indican.

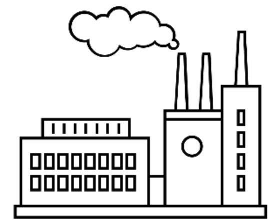
Sea $\mathbf{f(x) = 5x^2 - 2x + 3}$ y $\mathbf{g(x) = x^2 - 2}$

OPERACIÓN	PROCEDIMIENTO
f + g	
f – g	

(f)(g)	
f ÷ g	

Ahora que ya has ejercitado y aplicado los aprendizajes básicos, lee con atención la siguiente actividad integradora y responde lo que se solicita.

Por la casa de Juan abrieron una fábrica de textiles. En las últimas semanas se ha notado una disminución en la calidad del aire, por lo que se decidió hacer un análisis de la situación. El día uno amaneció con 51 IMECAS (índice metropolitano de contaminación ambiental); si se asume que habrá un aumento de 1.5 IMECAS diarios…



a) Determina la ecuación que expresa el incremento de la contaminación.

b) Realiza una tabla y grafica los datos para los primeros 10 días.

c) ¿Cuál será el valor del IMECA al día 8?

d) Determina el valor de la pendiente de forma gráfica.

e) Encuentra la ecuación de la recta en su forma punto pendiente.

f) Si el principal contaminante es el $C0_2$ con un medio de los IMECAS totales, determina la ecuación en función de este contaminante.

g) ¿Qué cantidad de IMECAS produce el CO_2 en el día 5?

h) Si el $C0_2$ representa la mitad de los contaminantes totales, el ozono un tercio y los IMECAS restantes se derivan de los metales, determina las ecuaciones que representan el nivel de los IMECAS en función de cada tipo de contaminante.

i) Obtén la función total de los IMECAS en relación con los contaminantes.

j) Determina el nivel de IMECAS que produjo cada tipo de contaminante el día 5.

En los ejercicios que se muestran a continuación, realiza en el espacio correspondiente las operaciones necesarias para encontrar la respuesta correcta y describe el procedimiento que seguiste para determinar el resultado.

A. Resuelve las siguientes operaciones con polinomios y elige la respuesta correcta.

1. $\boldsymbol{x^5 - 6x^3 - 8x \quad por \quad 3a^2x^2}$
   a) $3a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3$
   b) $3a^2x^7 - 6a^2x^2$
   c) $3a^2x^7 + 18a^2x^5 + 24a^2x^3$
   d) $3a^2x^7 + 6a^2x^2$

2. $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 \quad por \quad xy - x^2 + 3y^2}$
   a) $x^4 + 6x^3y + 7xy^3 + 3y^4$
   b) $-x^4 + 3x^3y - 5xy^3 + 3y^4$
   c) $-x^4 + 6x^3y - 7xy^3 + 3y^4$
   d) $x^4 - 3x^3y + 5xy^3 + 3y^4$

3. $\boldsymbol{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x \quad entre \quad - 5x}$

a) $-\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 3x$

b) $\frac{1}{5}x^3 - x^2 + 2x + 3x$

c) $-\frac{1}{5}x^3 - x^2 - 2x + 3$

d) $-\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 3$

4. $\boldsymbol{3y^5 + 5y^2 - 12y + 10 \quad entre \quad y^2 + 2}$

a) $3y^7 - 6y^5 + 5y$

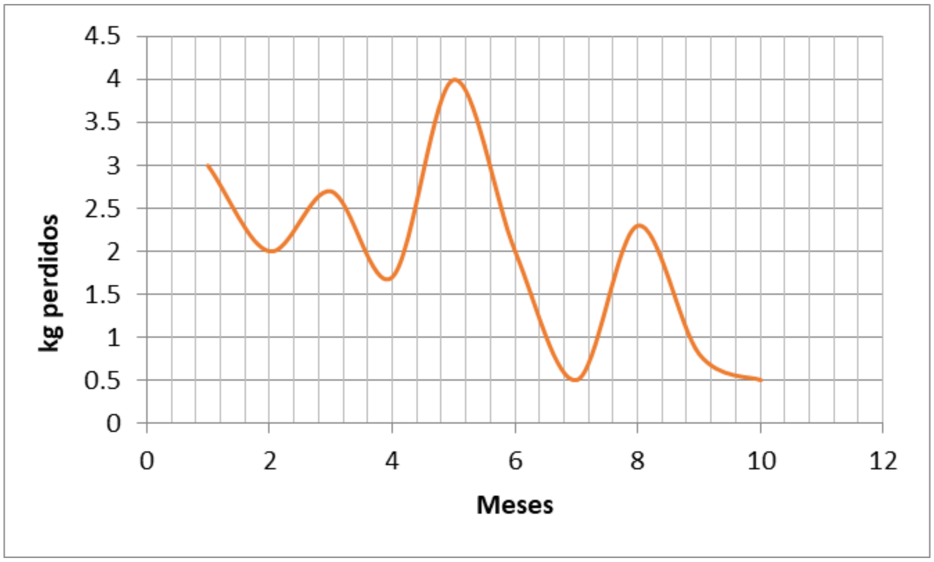
b) $3y^3 - 6y + 5$

c) $3y^7 + 6y^5 - 5y$

d) $3y^3 + 6y - 5$

B. **Observa las siguientes gráficas y responde lo que se solicita.**

5. Sofía empezó un plan de pérdida de peso hace algún tiempo.

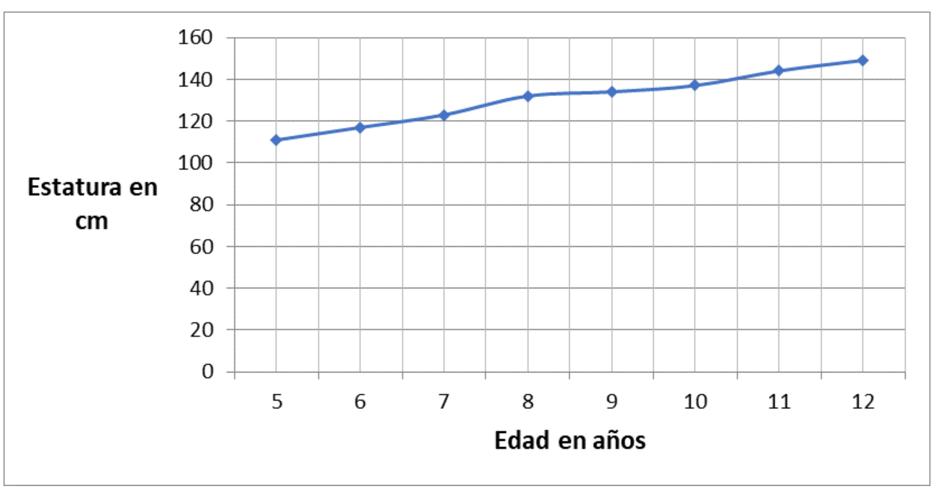


a) ¿Cuál fue la cantidad mínima y máxima que bajó en kg?

b) ¿En qué mes bajo más kilos si inició su plan en mayo?

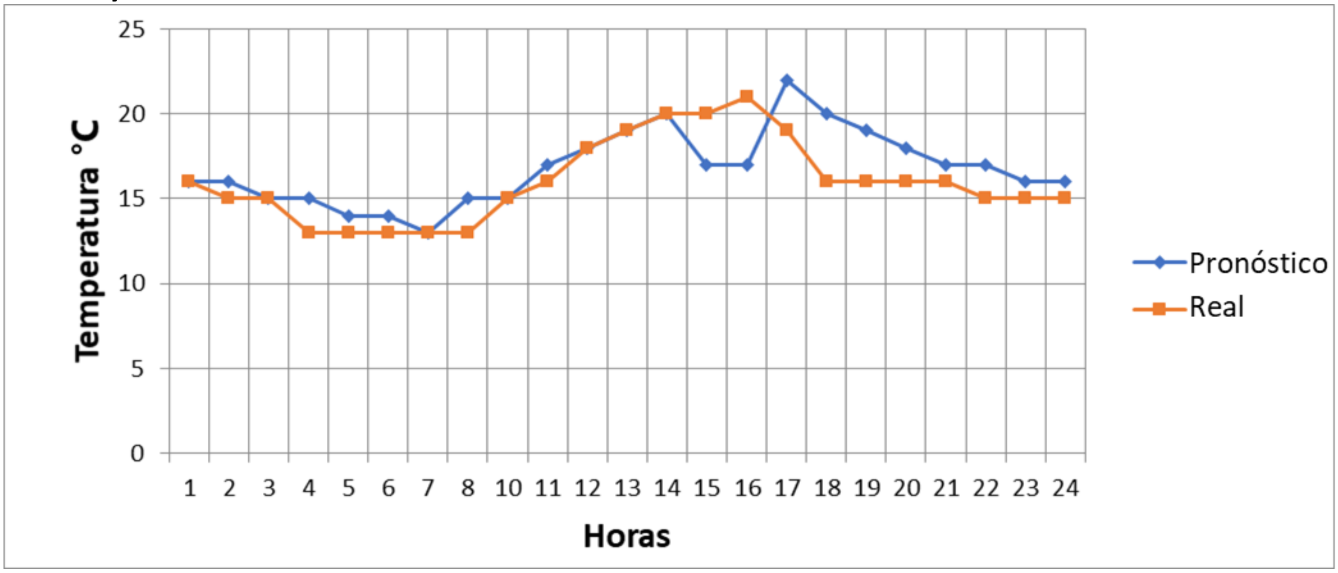
c) ¿Cuál fue su peso final si al inicio pesaba 82 kg?

6. La siguiente gráfica representa la estatura de Emilio. ¿A qué edad tuvo el mayor aumento de talla?



Respuesta:

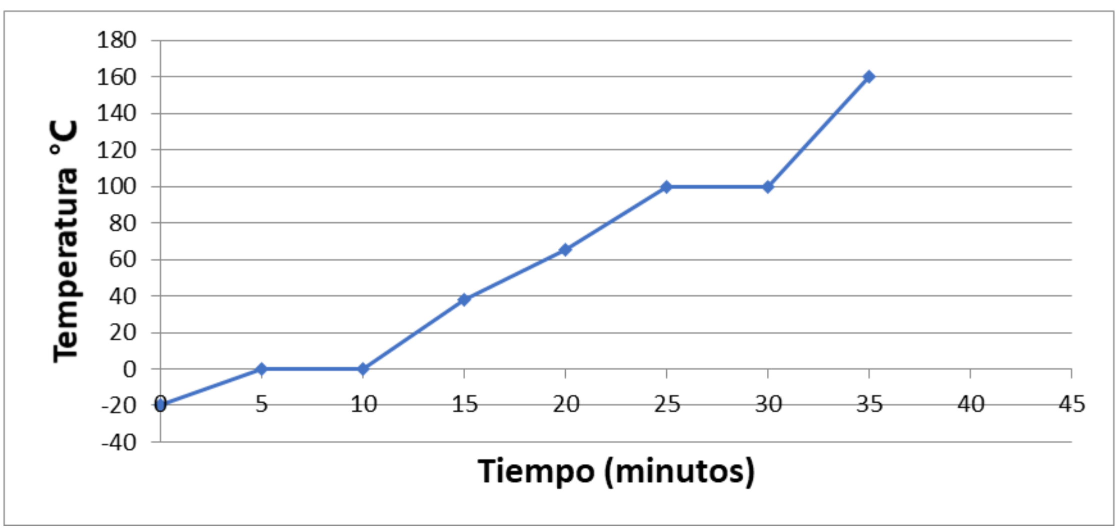
7. La siguiente gráfica presenta el pronóstico de temperatura y la temperatura real que se presentó el día de ayer.



a) ¿A qué hora del día fue mayor la discrepancia entre la temperatura real y el pronóstico?

b) ¿En cuántas ocasiones en el día se registraron los mismos datos de temperatura y en qué horas fueron?

8. En la escuela se determinó experimentalmente la curva de calentamiento del agua.



a) ¿En cuánto tiempo alcanzó el agua su punto de ebullición?

C. Determina el valor de las siguientes funciones.

9. Sea $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1-x}} \qquad \boldsymbol{cuando\ x = -5}$

a) $\sqrt{6}$
b) $\sqrt{4}$
c) 2
d) 4

10. Sea $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x} \quad \boldsymbol{cuando\ x = 4 + h}$

a) $8 + h^2 - 2h$
b) $8 + 3h^2 -$
c) $16 + h^2 - 2h$
d) $8 + 2h^2$

D. Realiza la suma de las siguientes funciones.

11. Sean $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = \sqrt{x-2}}$

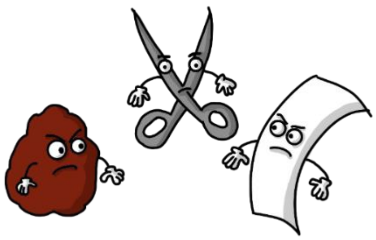
a) $(f+g)(x) = \sqrt{2x} - 2$
b) $(f+g)(x) = \sqrt{x^2 - 2}$
c) $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-2}$
d) $(f+g)(x) = \sqrt{2x-2}$

12. Sean $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-1} \quad y \quad g(x) = \frac{1}{2x+1}}$

a) $(f+g)(x) = \frac{2}{2x+1}$
b) $(f+g)(x) = \frac{3x}{(x-1)(2x+1)}$
c) $(f+g)(x) = \frac{1}{3x}$
d) $(f+g)(x) = \frac{1}{(x-1)(2x+1)}$

II. PROBABILIDAD

¡ Piedra, papel o tijeras!



¿Sabías que…

…la teoría de **probabilidades** surgió en 1654 a partir de una disputa entre los matemáticos Blaise Pascal y Pierre de Fermat tras jugar cartas y dados?

Sin embargo, ¡**las probabilidades siempre han existido**!

"La vida es un juego de azar".

*"Las preguntas más importantes de la vida, de hecho,
no son en su mayoría más que problemas de probabilidad".*

"Nada es imposible, sólo teóricamente improbable".

"EL DESTINO SE RÍE DE LAS PROBABILIDADES".

"Una pizca de probabilidad tiene tanto valor como una libra de quizá".

"Razonar: sopesar probabilidades en la balanza del deseo".

"Parece que va a llover, el cielo se está nublando…".

2.1. CONJUNTOS

Cuando hablamos de **conjuntos**, nos referimos a la agrupación de elementos homogéneos o heterogéneos, **reales** (frutos, autos, personas, etc.) o **abstractos** (letras, números, símbolos, etc.), que pertenecen a la misma categoría. Algunos sinónimos de conjunto son clase, grupo y colección.

En general, se denomina "elementos de un conjunto" a los elementos, por ejemplo, los elementos de un conjunto de:

Libros de terror

Maestros de matemáticas

Autos de un estacionamiento

Un conjunto se denota con una letra mayúscula (A, B, C, etc.) y sus elementos con letras minúsculas (a, b, c, d, etc.). Los elementos se encierran entre llaves (**{}**) y se separan por comas. Por ejemplo, el conjunto de frutos de una canasta se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{mango}, \mathrm{pera}, \mathrm{plátano}, \mathrm{manzana}, \mathrm{uva}, \mathrm{fresa}\}$$

Según la cantidad de elementos que contengan, los conjuntos se pueden clasificar en:

a) **Finitos**, cuando el número de elementos se puede contar o es exacto, por ejemplo:

   B = {las butacas del salón}
   A = {24,896 gramos de azúcar}
   M = {las manzanas de un árbol}

b) **Infinitos**, cuando la cantidad de elementos no se conoce debido a su amplia magnitud, por ejemplo:

   R = {los números reales}
   A = {los astros del universo}

c) **Universo** es el conjunto que contiene a todos los elementos de un determinado contexto, por ejemplo:

   U = {ecosistema marino}
   o
   U = {agua, animales, vegetales, corales, rocas, bacterias, materia}

Tomemos como ejemplo el lanzamiento de un dado. En este experimento, los siguientes valores se pueden obtener como resultado: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Sin embargo, si quisiéramos saber qué tan viable es que aparezca un 1 o un 6, tendríamos que recurrir a la probabilidad y aplicarla a este conjunto o experimento.

La probabilidad, pues, se puede aplicar a la teoría de conjuntos, aunque con algunas modificaciones en la terminología: el universo se conoce como *espacio muestral*; los subconjuntos, *eventos*; y los puntos en el conjunto, *eventos simples* o *sucesos*.

TEORÍA DE CONJUNTOS	PROBABILIDAD
Universo	Espacio muestral
Subconjuntos	Eventos
Puntos en el conjunto	Eventos simples o sucesos

2.2. PROBABILIDAD

La **probabilidad** es qué tan viable es que ocurra un evento determinado; para predecirlo con certeza y así poder estudiar sus consecuencias lógicas, se utilizan modelos.

En la vida cotidiana, no podemos estar seguros del desenlace de ciertos eventos o situaciones, pero sí podemos hablar de qué tan frecuentemente ocurren. Por esta razón, es común que la probabilidad se utilice en informática, economía, finanzas, comunicaciones y medicina.

En probabilidad, una acción o serie de acciones aleatorias se conoce como **experimento**; sus consecuencias son el **resultado** o **punto muestral** (para identificarlo como elemento del espacio muestral); y un conjunto de resultados se denomina **eventos**. El **espacio muestral** de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles.

Ejemplo:
La ruleta

Espacio muestral: 37 números
Experimento: Girar la ruleta
Resultados: 37 resultados posibles
Eventos: 4 eventos:
– Juego del cero
– Vecinos del cero
– Huérfanos
– Tercio del cilindro

Puede haber más eventos con ***n*** resultados.

2.3. PROBABILIDAD DE EVENTOS

La probabilidad de un evento es la frecuencia con que se espera que ocurra. Cuando todos los resultados posibles de un experimento son igualmente probables, la probabilidad es la relación entre el tamaño del espacio de eventos (los resultados en el evento) y el espacio muestral (todos los posibles resultados del experimento). La probabilidad de un evento *E* normalmente se escribe *P(E).*

$$P(E) = \frac{tamaño\ del\ espacio\ de\ los\ eventos}{tamaño\ del\ espacio\ muestral} = \frac{número\ de\ resultados\ del\ evento}{número\ total\ de\ resultados\ posibles}$$

Para describir un evento, se utilizan características que tienen en común los resultados. En el ejemplo de la ruleta, la condición puede ser que sean números pares o nones, que estén dentro una zona determinada, que sea cero, etc.

Existen dos tipos de eventos:

- **Eventos simples**: son aquellos eventos con un solo resultado, por ejemplo, girar la ruleta y que salga 0.
- **Eventos compuestos**: son aquellos eventos que incluyen más de un resultado. por ejemplo, girar la ruleta y que salga un numero par del 2 al 36.

A. PROBABILIDAD DE UN EVENTO SIMPLE

Para calcular probabilidad de un evento simple se usa la fórmula:

$$P\ (evento) = \frac{número\ de\ \ resultados\ favorables}{número\ de\ resultados\ posibles}$$

Ejemplo:
¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger al azar un mes del año, escojamos alguno que tenga 30 días? Recordemos que un año tiene 12 meses, de los cuales 4 tienen 30 días.

Para conocer la probabilidad:

1. Identifica el evento que se espera obtener.
2. Determina el número de casos posibles.
3. Determina el número de casos favorables (para los cuales se desea conocer la probabilidad).
4. Realiza las operaciones pertinentes.

$$\boldsymbol{P\ (mes\ con\ 30\ días) = \frac{4}{12} = 0.33}$$

Todas las monedas tienen dos caras; en México se conocen como *águila* y *sol*.
Veamos los siguientes casos:

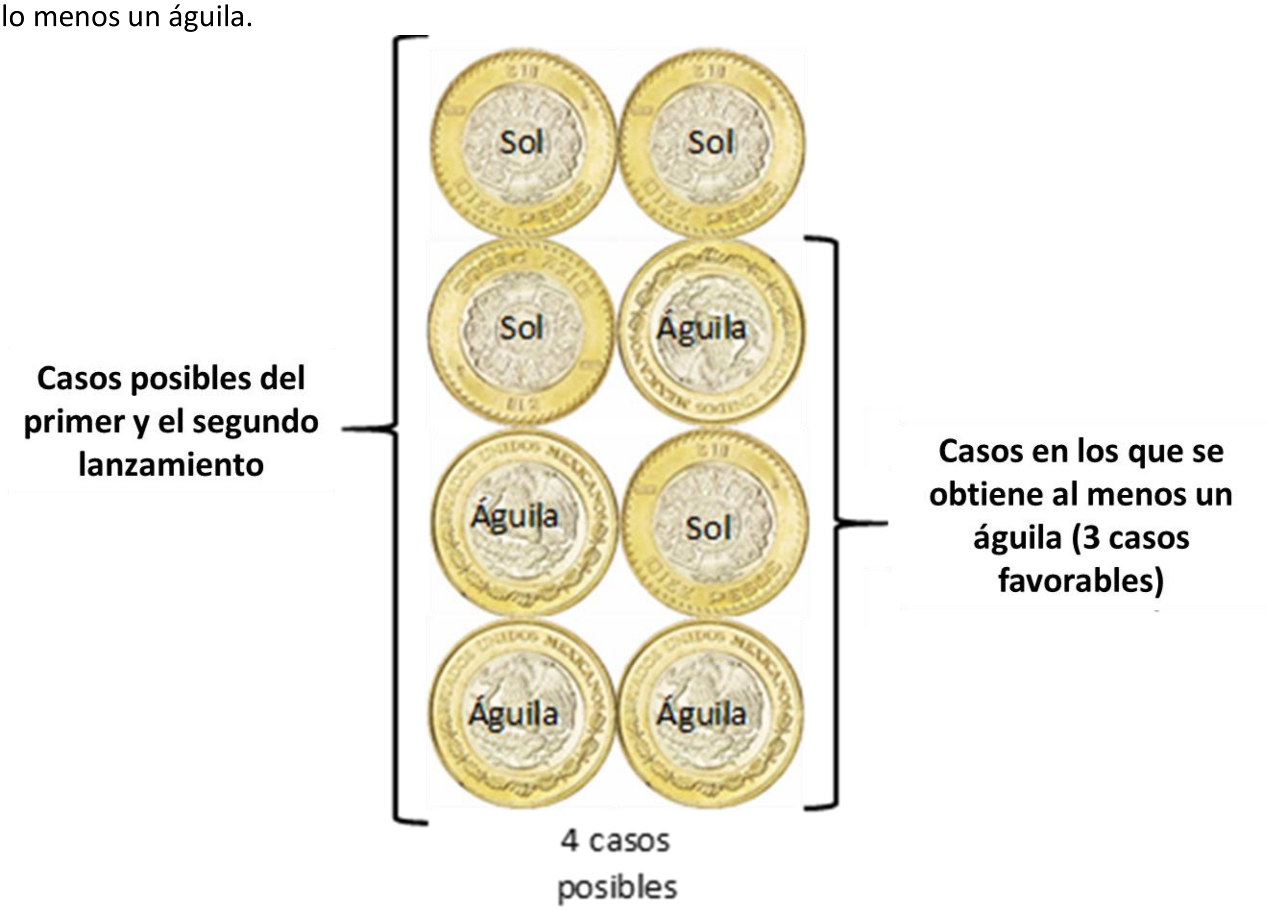
Caso 1:
¿Cuál es la probabilidad de obtener águila al lanzar una moneda?

$$P(\text{águila}) = \frac{\text{número de casos favorables para águila}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$$

De esta manera, podemos decir que la probabilidad de obtener águila al lanzar una moneda es de 50 %.

Caso 2:
¿Qué probabilidad hay de que, al lanzar una moneda al aire dos veces, obtengamos por lo menos un águila?

Primero determina el número total de casos posibles y el número de casos en los cuales se obtiene por lo menos un águila.



Por lo tanto, la probabilidad de obtener por lo menos un águila es:

$$P(por\ lo\ menos\ un\ águila) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ para\ águila}{número\ de\ casos\ posibles} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

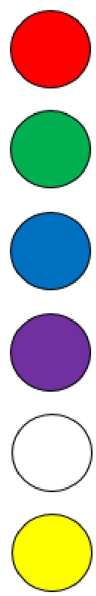
De esta manera, podemos decir que la probabilidad de obtener un águila después de lanzar una moneda dos veces es de 75 %.

Practiquemos…

Realiza las siguientes actividades de probabilidad.

1. En una bolsa hay 25 canicas rojas, 12 verdes, 18 azules, 26 moradas, 10 blancas y 9 amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar una canica al azar, salga cada uno de los colores?

   Relaciona las columnas.



18%
100/18
0.09
1.2%
25%
0.9
10/100
2.5
0.12
100/10
26/100

2. En una fiesta realizada en un salón, hay 10 niños, 17 adultos y 10 adultos mayores. ¿Cuál es la probabilidad de que en diferentes momentos salga del salón un niño, un adulto y un adulto mayor?

Niño	Adulto	Adulto mayor

B. PROBABILIDAD DE UN EVENTO COMPUESTO

La probabilidad compuesta es la probabilidad de que ocurran dos eventos, ***A*** y ***B***. Los eventos pueden ser dependientes o independientes.

- **Eventos dependientes**: El resultado del primer evento afecta el resultado del segundo evento. Por ejemplo, si retiras un naipe de un mazo y no lo vuelves a colocar, el escenario y la probabilidad cambian para la siguiente vez que se saque otro naipe.

  Primera vez: $\mathbf{\frac{4}{52}}$ (4 ases de 52 naipes) **Segunda vez:** $\mathbf{\frac{3}{51}}$ (3 ases de 51 naipes)

  Para encontrar la probabilidad de dos eventos dependientes, multiplica la probabilidad del primer evento por la probabilidad del segundo evento después de que ocurre el primero.

$$P(A\ y\ B) = P(A) * P(B\ después\ de\ A)$$

Se eligen dos cartas de un mazo de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras si hay un total de 12 figuras en el mazo?

$$P(A\text{: } primera\ carta\ de\ cara\ elegida) = \frac{12}{52}$$

$$P(B\text{: } segunda\ carta\ de\ cara\ elegida) = \frac{11}{51}$$

$$\boldsymbol{P(A\ y\ B)} = \frac{12}{52} * \frac{11}{51} = \frac{33}{663} = \mathbf{\frac{11}{221}}$$

- **Eventos independientes**: Ocurren cuando el resultado de uno no afecta el resultado del otro. Por ejemplo, supón que lanzas una moneda y tiras un dado al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y cuatro? El hecho de que salga cuatro no influye en el resultado del lanzamiento de la moneda.

  Para encontrar la probabilidad de dos eventos independientes, multiplica la probabilidad del primer evento por la probabilidad del segundo evento.

$$P(A\ y\ B) = P(A) * P(B)$$

Para determinar la probabilidad de que salga cara y cuatro al lanzar una moneda y tirar un dado al mismo tiempo, sigue los siguientes pasos:

$$P(moneda\ sol\ o\ águla) = \frac{1}{2}$$

$$P(dado\ en\ 4) = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{P(A\ y\ B)} = \frac{1}{2} * \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

Resuelve los siguientes casos.

1) Miguel tiene una caja de fusibles que contiene 20 unidades, de las cuales cinco salieron defectuosas. Si selecciona dos fusibles al azar y los separa de la caja uno después del otro sin reemplazar el primero, ¿cuál es la probabilidad de que ambos fusibles estén defectuosos?

2) Un pequeño poblado tiene un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 0.98, y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se requiera es 0.92. Si alguien resulta herido durante un incendio, calcula la probabilidad de que la ambulancia y el carro de bomberos estén disponibles.

3) Para decidir quién se lleva un balón, dos amigas recurren al azar y juegan un “dos de tres”: gana quien obtenga dos resultados iguales consecutivos al lanzar tres veces una moneda. ¿cuál es la probabilidad de obtener dos águilas y un sol?

Ahora que ya has ejercitado y aplicado los aprendizajes básicos, lee con atención la siguiente actividad integradora y responde lo que se solicita.

Maricarmen hará una fiesta a su hija porque fue la mejor de su clase en la escuela. Compró una bolsa de globos para adornar la casa y quiere saber cuántos hay de cada color, así que los cuenta y obtiene los siguientes datos: 18 globos rojos, 6 verdes, 12 morados, 10 azules, 14 rosas, 16 naranjas, 9 amarillos y 15 blancos. Además, en la bolsa venían de regalo globos transparentes con diferentes estampados: 15 con un corazón, 18 con una flor y 17 con una estrella.

a) ¿Qué probabilidad hay de que, al escoger un globo al azar de la bolsa, sea de color azul?

b) ¿Qué probabilidad hay de que, al escoger un globo al azar de la bolsa, sea de color naranja o morado?

c) Los colores favoritos de la hija de Maricarmen son el verde, el rosa y el blanco. ¿Qué probabilidad hay de que, al escoger un globo al azar de la bolsa, alguno sea de estos colores?

d) ¿Qué probabilidad hay de que, al escoger al azar dos globos, uno sea transparente y otro de color amarillo?

e) ¿Qué probabilidad hay de que, al escoger un globo al azar, éste sea de algún color?

f) Si escogiéramos al azar un globo transparente, ¿qué probabilidad hay de que tenga estampado de corazón?

g) ¿Qué probabilidad hay de escoger al azar tres globos verdes, tres blancos y tres con estrella?

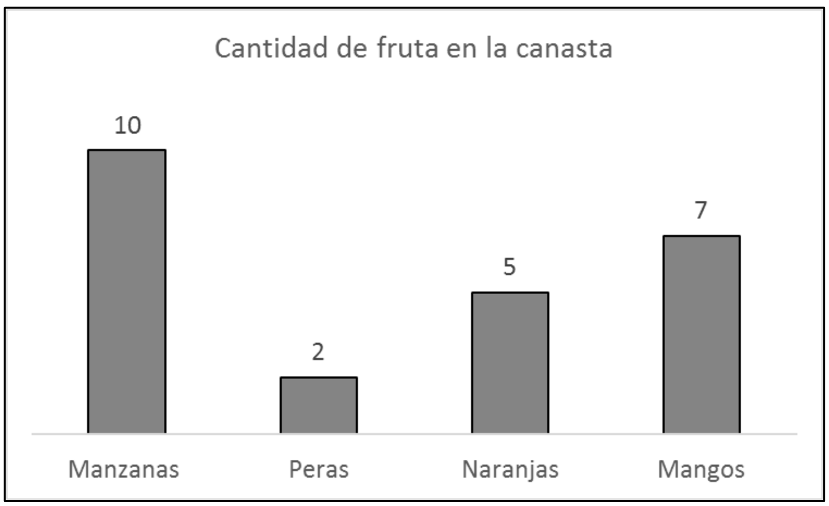
h) ¿Con cuántos globos adornará Maricarmen la casa?

Encuentra la respuesta correcta en los ejercicios que se muestran a continuación. Realiza las operaciones necesarias y describe el procedimiento que realizaste para determinar el resultado.

1. **Un club infantil ofrece diferentes deportes para fomentar el ejercicio entre los niños. 30 % de ellos practica natación, 40 % futbol y 10 % ambos deportes. ¿Qué probabilidad hay de que, al escoger a un niño al azar, no practique ninguno de estos dos deportes?**

   A) 0.2 B) 0.4 C) 0.5 D) 0.6

2. **La gráfica muestra la cantidad de frutas que hay en una canasta. Si tomamos una fruta de la canasta al azar, ¿cuál de las frutas tiene mayor probabilidad de ser seleccionada?**



   A) Peras B) Naranjas C) Mangos D) Manzanas

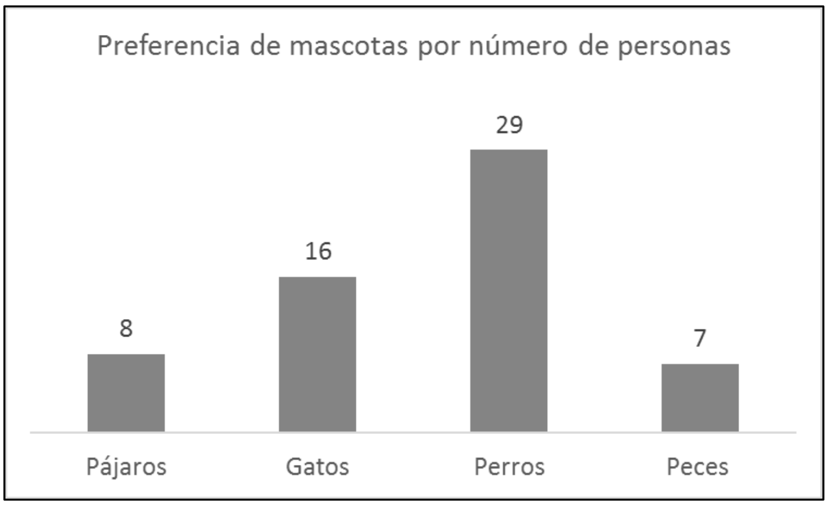
3. **La mamá de Santiago le hizo un pastel para festejar su octavo cumpleaños. Para adornar el pastel, utilizó 1/10 de cobertura roja, 1/5 de cobertura azul, 2/10 de cobertura verde y 2/5 de cobertura morada. ¿Cuál color es más probable que aparezca en las rebanadas?**

   A) Rojo B) Morado C) Verde D) Azul

4. **Mario, José y Santiago son tres amigos que deciden jugar a los volados. Los tres utilizan tres monedas de la misma denominación. ¿Cuál es la probabilidad de que todos saquen sol?**

A) 1/16 B) 1/8 C) 1/4 D) 2/4

5. **En 2018, el gobierno de una ciudad realizó una encuesta acerca de qué mascota preferían las personas y se obtuvieron los siguientes datos.**



Si escogemos alguna mascota al azar, ¿cuál tiene menor probabilidad de ser escogida?

A) Gatos B) Pájaros C) Peces D) Perros

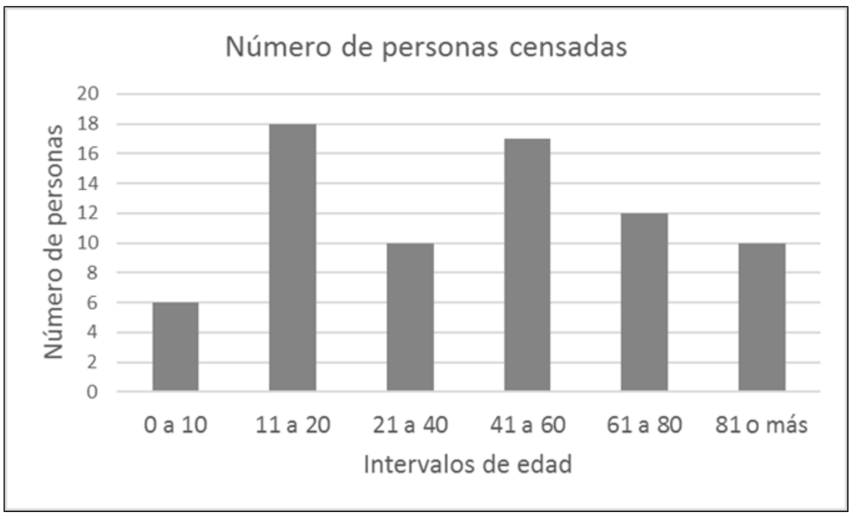
6. **En un arreglo floral, el florista acomodó 15 rosas, 18 tulipanes, 2 margaritas y 26 claveles. Si le vendamos los ojos a alguien y le pedimos que seleccione alguna flor, ¿cuál es más probable que elija?**

A) Clavel B) Margarita C) Rosa D) Tulipán

7. **En Puebla hay dos fábricas productoras de cobijas que distribuyen mercancía a los pequeños locales de toda la región. Una de las fabricas produce 10,000 piezas y la otra el doble. Si el porcentaje de piezas defectuosas de la primera fábrica es 10 % y el de la segunda 8 %, ¿qué probabilidad hay de que, al escoger una cobija al azar, ésta salga defectuosa?**

A) 12/150 B) 21/150 C) 13/150 D) 31/150

8. **La gráfica muestra las edades de las personas censadas en la colonia Miguel Hidalgo.**



Al seleccionar al azar a una persona, ¿en cuál intervalo es más probable que esté su edad?

A) 0 a 20 B) 11 a 40 C) 41 a 80 D) 61 o más

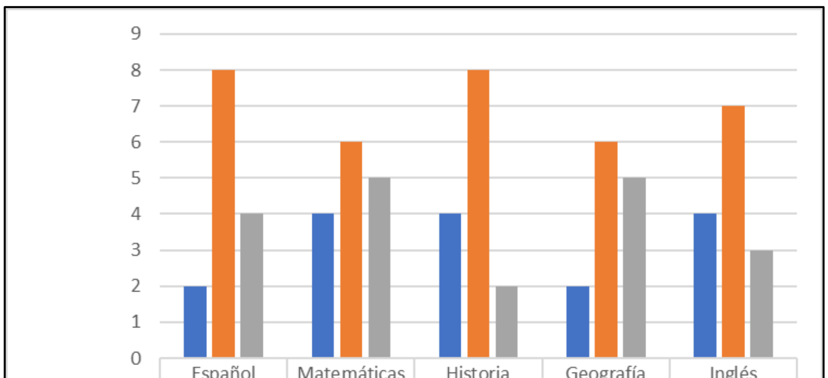
9. **En el área boscosa del pueblo hay diferentes especies de árboles, de los cuales 1/12 son fresnos, 1/6 sauces, 5/12 pinos y 2/6 robles. Si seleccionáramos uno al azar para decorarlo, ¿qué árbol tiene mayor probabilidad de ser elegido?**

A) Pino B) Roble C) Fresno D) Sauce

10. Asistieron 28 mujeres y 16 hombres a una fiesta en un salón. Si escogiéramos a alguno de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

A) 4/11 B) 4/10 C) 4/12 D) 4/16

11. En una escuela preparatoria evaluaron a los tres grupos de quinto semestre para determinar en qué materia se presentaba el mayor índice de reprobación y se obtuvieron los siguientes resultados.



	Español	Matemáticas	Historia	Geografía	Inglés
1er grupo	2	4	4	2	4
2do grupo	8	6	8	6	7
3er grupo	4	5	2	5	3

Según los datos, ¿qué materia tiene menor probabilidad de reprobarse?

A) Español B) Matemáticas C) Geografía D) Inglés

12. Al salir de la escuela, Mauricio fue al mercado a comprar una bolsa de canicas que contenía 3/16 verdes, 4/8 azules, 1/16 rosas y 2/8 rojas. Si Mauricio escoge una al azar, ¿qué color es más probable que salga?

A) Rosa B) Azul C) Roja D) Verde

III. ESTADÍSTICA

Estadística

Cuando se habla de estadística, es común relacionarla con una serie de **datos numéricos presentados de manera ordenada y sistemática**; para entender estos datos, la estadística ofrece métodos y técnicas basadas en modelos.

¿Dónde está?

Nos encontramos con esta disciplina **en nuestro día a día** al leer un periódico, ver la televisión o escuchar la radio; en todos estos casos, se utiliza algún tipo de información estadística. Ejemplos más específicos están relacionados con la investigación en diferentes disciplinas, como medicina, biología o psicología.

¿Cómo se clasifica?

Cuando la estadística se usa como método para obtener, clasificar, resumir y analizar datos con el fin de obtener resultados útiles para cualquier tipo de estudio (siempre y cuando se caracterice por la variabilidad y la incertidumbre), se habla de **estadística descriptiva**. Cuando la estadística se utiliza para realizar inferencias a partir de estos datos, con la finalidad de ayudar a la toma de decisiones y formular predicciones, se habla de **estadística inferencial**.

3.1. ORGANIZACIÓN DE DATOS

El análisis estadístico se basa en datos, la "materia prima" de la estadística. Para la recolección de datos se pueden utilizar diferentes técnicas, como observaciones, cuestionarios, entrevistas, etc.; después, es importante organizar y ordenar estos datos, principalmente en tablas, mediante la distribución de frecuencia simple o intervalos.

La **frecuencia** es el número de veces que aparece cada variable o dato nominal.

Los datos que se obtengan pueden ser cualitativos o cuantitativos.

A. DATOS CUALITATIVOS

En el caso de los **datos cualitativos**, la agrupación de datos es sencilla y se hace de acuerdo con las modalidades de las variables; mediante un conteo, se determina el número de datos (frecuencia) que corresponden a las diferentes categorías de la variable.

Ejemplo

La mamá de Ignacio le pidió recolectar las manzanas y las naranjas que estaban debajo de los árboles. Para que lo pudiera hacer, le dio una canasta. Al terminar, Ignacio dejó la canasta en la mesa y su mamá sacó la fruta en el siguiente orden:

Posteriormente, organizó las cantidades en una tabla y calculó la proporción y el porcentaje de cada fruta.

Tipo de fruta	Frecuencia	Proporción	Porcentaje
Manzanas	8	0.533	53.3%
Naranjas	7	0.467	46.7%
Total	15	1	100

Para organizar datos cualitativos conviene utilizar una tabla-resumen que presente el número de respuestas para cada categoría en forma de frecuencia o porcentaje. Al mostrar en columnas separadas la frecuencia, la cantidad o el porcentaje de elementos en un conjunto de categorías, la tabla-resumen permite ver las diferencias entre éstas.

A. DATOS CUANTITATIVOS

En cuanto a la organización de **datos cuantitativos**, se utiliza un procedimiento similar al de los datos cualitativos, pero con más elementos. Las dos principales opciones son la distribución de frecuencia y la distribución de frecuencia acumulada.

Frecuencia absoluta: Es el número de veces que aparece un valor; se representa con $\boldsymbol{f_i}$ donde el subíndice representa cada uno de los valores. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, representado por $\boldsymbol{N}$.

$$\boldsymbol{f1 + f2 + f3 + \cdots + fn = N} \quad \text{o}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} f_i = N}$$

Frecuencia relativa: Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de un determinado valor entre el número total de datos; su representación es $\boldsymbol{n_i}$. La suma de las frecuencias relativas es igual a **1**, lo cual puede verse fácilmente si se factoriza N.

$$\boldsymbol{n_i = \frac{f_i}{N}}$$

Frecuencia acumulada: Es la suma de frecuencias absolutas de todos los valores iguales o inferiores al valor en cuestión; se representa por $\boldsymbol{f_i}$.

Frecuencia relativa acumulada: Es el resultado de dividir la frecuencia acumulada entre el número total de datos; su representación es $\boldsymbol{N_i}$.

Cuando se trata de datos acumulados, las letras que los representan están en mayúscula.

Ejemplo
La mamá de Ignacio contó el total de manzanas y naranjas, anotó las cantidades y calculó las frecuencias de la fruta.

Agrupación de datos de acuerdo con su categoría			
Tipo de fruta	**Frecuencia absoluta (f)**	**Frecuencia relativa (fr)**	**Frecuencia acumulada (fa)**
Manzanas	8	0.533	8
Naranjas	7	0.467	15
Total	15	1	

Ejemplo:
En un hospital hay 15 pacientes con las siguientes edades (en años):

12, 14, 10, 15, 16, 12, 14, 18, 21, 19, 19, 18, 12, 15, 17

- El primer paso es ordenar los números de menor a mayor:

10, 12, 12, 12, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 19, 21

Al ordenar los datos de esta manera, podemos saber que la edad mínima de los pacientes del hospital es 10 años y la máxima es 20.

- Construye la tabla de frecuencias:

EDADES	FRECUENCIA ABSOLUTA f_i	FRECUENCIA RELATIVA n_i	FRECUENCIA ACUMULADA F_i	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA N_i
10	1	0.067	1	0.067
12	3	0.2	4	0.267
14	2	0.133	6	0.4
15	2	0.133	8	0.533
16	1	0.067	9	0.6
17	1	0.067	10	0.667
18	2	0.133	12	0.8
19	2	0.133	14	0.933
21	1	0.067	15	1
Σ	15	1		

La distribución de frecuencia es la agrupación de datos en categorías mutuamente excluyentes; los datos se presentan de tal modo que se pueda ver el número de observaciones que hay en cada categoría. Esto proporciona un valor añadido a la agrupación de datos.

El intervalo de clase es la agrupación de variables cuando el número de valores es “grande” o la variable es continua. Por ejemplo, las edades del ejercicio se podrían agrupar de la siguiente manera:

10 – 12
13 – 15
16 – 18
19 – 21

Al hacer la distribución de frecuencias los datos cambiarán, pero el resultado será el mismo.

Resuelve los siguientes casos.

1. Se realizó un conteo durante 30 días para conocer el número de veces que una mascota muerde una pelota. Los datos que se obtuvieron fueron los siguientes:

4, 4, 1, 3, 5, 3, 2, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 8, 3, 5, 3, 4, 7, 2, 3

a) Para calcular la distribución de frecuencias de la variable, obtén las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
b) ¿Qué proporción de días tiene tres o menos eventos?
c) Agrupa por intervalos de amplitud 2 los valores de la variable.
d) Elabora una tabla de frecuencias.
e) Calcula la distribución de frecuencias y representa las frecuencias absolutas y acumuladas con los gráficos correspondientes.

2. Los datos que se dan a continuación corresponden a las estaturas en cm de 80 bebés:

60, 66, 77, 70, 66, 68, 57, 70, 66, 52, 75, 65, 69, 71, 58, 66, 67, 74, 61, 63, 69, 80, 59, 66, 70, 67, 78, 75, 64, 71, 81, 62, 64, 69, 68, 72, 83, 56, 65, 74, 67, 54, 65, 65, 69, 61, 67, 73, 57, 62, 67, 68, 63, 67, 71, 68, 76, 61, 62, 63, 76, 61, 67, 67, 64, 72, 64, 73, 79, 58, 67, 71, 68, 59, 69, 70, 66, 62, 63, 66

a) Obtén una distribución de datos en intervalos de amplitud 5, siendo el primer intervalo [50 – 55].
b) Calcula el porcentaje de bebés con estatura menor que 65 cm.
c) ¿Cuántos bebés tienen estatura igual o mayor que 70 cm, pero menor que 85?

3.2. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son una serie de valores numéricos en torno a los cuales se agrupan en mayor o menor medida los valores de una variable estadística. Estas medidas estadísticas nos ayudan a conocer el comportamiento de una distribución estadística de manera aproximada. Entre estas medias están la media, la mediana y la moda.

A. MEDIA

Es el resultado de sumar todos los valores numéricos de un grupo y dividir la suma entre el número total de valores. La media también se conoce como **promedio ($\bar{X}$)**.

Ejemplo:
Josefina imparte la materia de Ciencias a un grupo de sexto semestre de preparatoria. En el examen final, sus alumnos obtuvieron las siguientes calificaciones:

7, 6, 8, 8, 9, 6, 8, 8, 10, 5, 7, 7, 9, 10, 8

Entonces:

$\bar{X}$ = 7 + 6 + 8 + 8 + 9 + 6 + 8 + 8 + 10 + 5 + 7 + 7 + 9 + 10 + 8 **/** 15
$\bar{X}$ = 116 / 15
$\bar{X}$ **= 7.73** es el promedio de las calificaciones del grupo

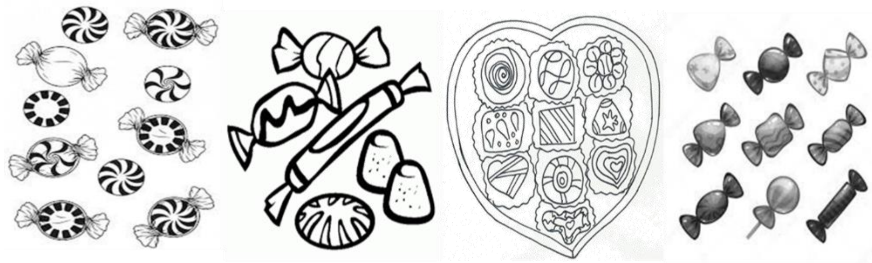
Practiquemos…
Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Mariana y José fueron al supermercado a comprar la despensa de la semana y compraron los siguientes productos:

a) Si decidieron dividir los gastos en partes iguales, ¿cuánto le toca poner a cada uno?

b) ¿Cuál es el costo medio de los productos de origen animal?

2. Susana prometió dar a su hija diferentes dulces cada semana durante un mes si se portaba bien. Le dio los siguientes dulces:

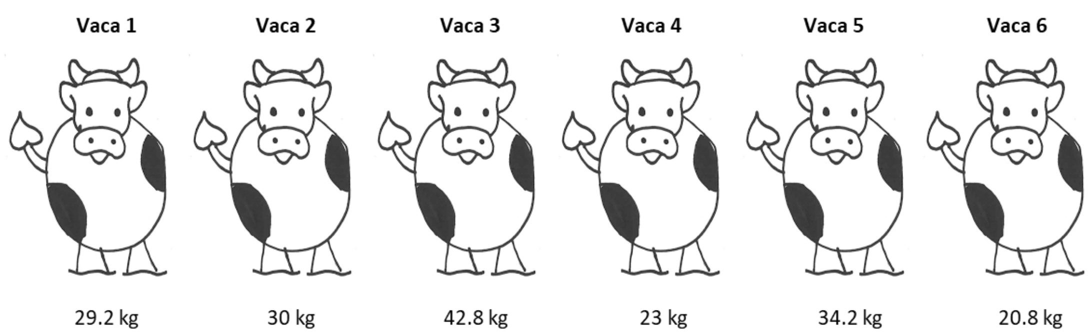


Semana 1 Semana 2 Semana 3 Semana 4

a) En promedio, ¿cuántos dulces dio Susana a su hija por semana?

b) ¿Cuál fue la cantidad mínima de dulces por semana? ¿Y la máxima?

3. Mario alimentó a sus seis vacas con las siguientes cantidades de pastura:



a) ¿Cuál de las vacas consumió la cantidad de pastura que representa la media del total del alimento consumido?

b) ¿Cuál es el promedio de alimento que consumieron las tres primeras vacas?

c) Si hace grupos de dos vacas, saca los promedios de consumo por pareja y las alimenta con el promedio más bajo, ¿cuánto daría a cada vaca?

B. MEDIANA

También conocida como **valor central**, la mediana es el valor numérico que está en el centro de la serie de un conjunto de valores ordenados; hay, por tanto, igual número de valores superiores e inferiores a ella. La mediana se expresa como **Me**.

Cuando ordenamos los valores de mayor a menor o viceversa y la serie es impar, entonces, la mediana será el valor que ocupe la posición $\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{2}}$ de la serie numérica. En cambio, si la serie de valores es par, se hará un promedio entre los dos valores centrales.

Entonces, primero hay que ordenar los datos de menor a mayor, y después seleccionar el número que queda al centro de la serie numérica.

Ordenar: 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10

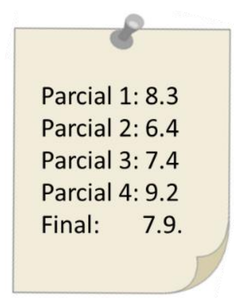
Seleccionar: 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, **8**, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10

Entonces, podemos decir que $\boldsymbol{Me = 8}$.

Practiquemos…
Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Mariela sacó las siguientes calificaciones en sus exámenes de Matemáticas:

¿Cuál es la mediana de las calificaciones que obtuvo Mariela en sus exámenes de Matemáticas?

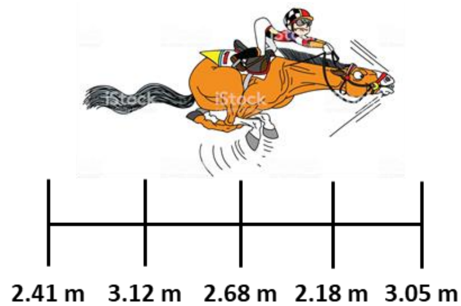


2. Ignacio y sus compañeros de clase tienen las siguientes edades:

9 años 6 años 7 años 9 años 9 años 6 años 7 años

¿Cuál es la mediana de edad?

3. En sus sesiones de entrenamiento, un caballo de carreras recorrió las siguientes distancias durante cinco semanas:



¿Cuál es la mediana de las distancias que recorrió el caballo durante sus entrenamientos?

C. MODA

La moda es el valor —o valores— de la variable que se presenta con mayor frecuencia. La moda se expresa como **Mo**. Cuando una serie de valores presenta una sola moda, se le conoce como unimodal; si tiene dos bimodal; y así sucesivamente.

Así pues, se identifica el valor de mayor frecuencia.

$$\underbrace{5}_{1}, \underbrace{6, 6}_{2}, \underbrace{7, 7, 7}_{3}, \underbrace{8, 8, 8, 8, 8}_{\boxed{5}}, \underbrace{9, 9}_{2}, \underbrace{10, 10}_{2}.$$

Por tanto, podemos decir que $\boldsymbol{Mo = 8}$.

Practiquemos…
Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Susana y sus compañeros obtuvieron las siguientes calificaciones en su clase de idiomas:

7, 7, 6, 10, 1, 4, 5, 5, 3, 9, 5, 5, 8, 6

Calcula la moda de las calificaciones.

2. Una doctora realizó un estudio para saber cuánto tardaban los niños en caminar por primera vez y obtuvo los siguientes datos:

Meses	Niños
8	1
9	10
10	8
11	6
12	9
13	4
14	2

¿Cuál es el valor de la moda?

3. En una tienda departamental se han vendido las siguientes prendas de vestir:

a) ¿Qué prenda representa la moda de los artículos que se vendieron en la tienda departamental?

3.3. INTERPRETACIÓN DE DATOS MEDIANTE TABLAS Y GRÁFICAS

Para interpretar la información que se recopila, primero hay que clasificarla y organizarla en tablas, cuadros, diagramas, etc.; después se realizan los cálculos de las medidas descriptivas que permitan representar cuantitativamente los datos y resumir la información.

Una vez plasmados en gráficos, los datos estadísticos se interpretan para identificar la información de interés, es decir, la razón por la cual se realizó el estudio. Entonces,

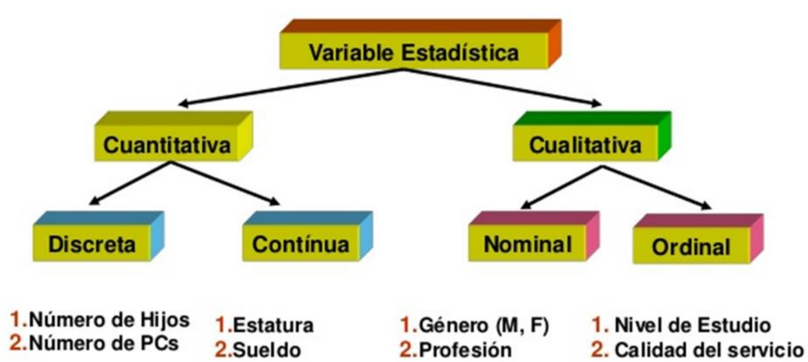
a) se describen y resumen los datos,
b) se identifican relaciones entre variables,
c) se comparan variables,
d) se identifican las diferencias entre las variables y
e) se pronostican resultados.

Los factores en un estudio se representan mediante **variables**. Las variables tienen valores o niveles que resumen y reducen los datos; así, se busca representar la información esencial. Las variables se pueden clasificar de diversas maneras, por ejemplo:

- Una **variable continua** toma todos los valores dentro de su rango permitido; se usa en respuesta a la pregunta “¿cuánto?”. Este tipo de variable incluye mediciones como peso y altura.
- Las **variables discretas** pueden tomar sólo ciertos valores entre sus valores máximo y mínimo, aun si dichos valores no tienen un límite.
- Las **variables categóricas** contienen un número finito de categorías o grupos distintos. Los datos categóricos pueden no tener un orden lógico. Por ejemplo, el método de pago.

Una **escala de medición** es el conjunto de valores posibles que puede tener una variable determinada. Por lo general, se distinguen cuatro escalas o niveles de medición:

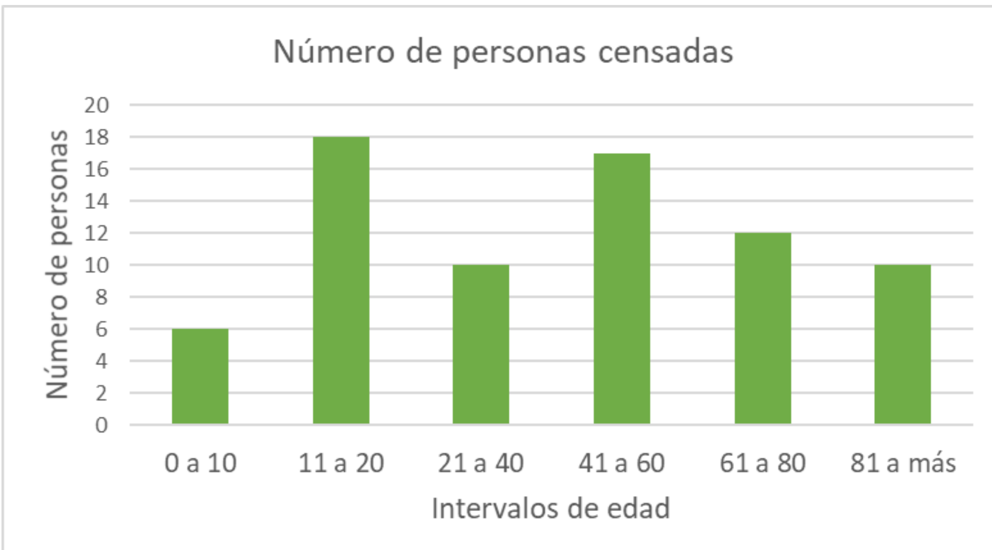
Nominal y **ordinal**. Se conocen como escalas categóricas y se usan comúnmente para variables **cualitativas**.
Intervalos y **de proporción**, cociente o razón. Se conocen como escalas numéricas; son adecuadas para la medición de variables **cuantitativas**.



La interpretación de datos cualitativos es *categórica*, es decir, los datos no se describen mediante valores numéricos o patrones, sino por medio de la descripción del contexto, por ejemplo, la preferencia de mascotas, los colores favoritos, los estados de ánimo, etc.

La interpretación de datos cuantitativos es *numérica*, ya que se refiere a un conjunto de procesos mediante los cuales se analizan datos numéricos. En la mayoría de los casos, implica el uso de modelos estadísticos como la desviación estándar, la media y la mediana, entre otras medidas de tendencia central y de dispersión, además de análisis de regresión, análisis de cohortes y análisis predictivo y prescriptivo.

Cómo interpretar una gráfica



1. **Interpretación o lectura literal:** se lee la información que transmiten las gráficas. En el caso de esta gráfica, se identifica la información del eje horizontal (x) —en el que se representan las edades— y, luego, en el eje vertical (y), se identifica la cantidad de personas que tienen ciertas edades.

2. **Interpretación o lectura crítica:** se evalúa la información sin buscar nuevas hipótesis. Por ejemplo, "puede decirse que hay pocos niños en el lugar donde se aplicó el censo".

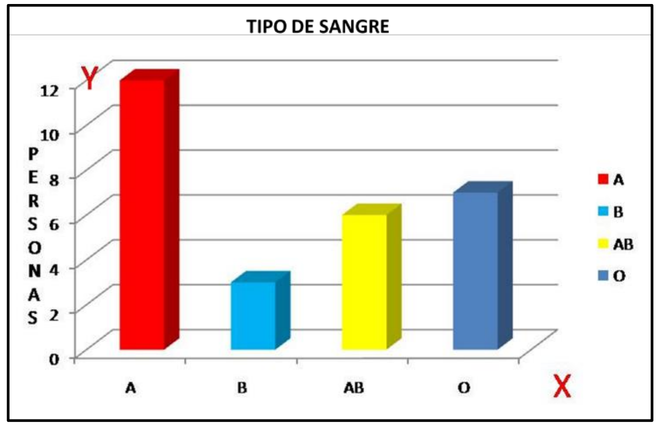
3. **Interpretación o lectura hipotética:** se hacen predicciones e inferencias con los datos de la gráfica y se formulan nuevas hipótesis. Por ejemplo, "¿cuál será la razón por la que hay pocos niños?" o "el bajo número de personas de 21 a 40 años se puede deber a la exposición a factores de riesgo que afectan a ese edad, por lo que se podrían implementar programas para evitarlos.

Practiquemos…

Observa los siguientes gráficos. Plantea una situación con la información que se presenta e interpreta los datos de manera cuantitativa y/o cualitativa, según corresponda.

- ✓ **Gráfico 1**

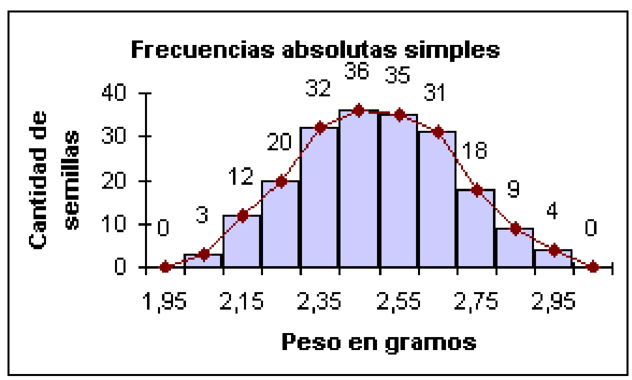
Situación:



Interpretación:

- ✓ **Gráfico 2**

Situación:



Interpretación:

- ✓ **Gráfico 3**

Tabla de porcentajes

	España	Francia	Italia	Grecia	
Pez espada	11,61	10,45	3,47	8,05	33,57
Mero	9,03	5,55	1,50	3,88	19,96
Besugo	1,31	1,70	0,49	0,78	4,28
Lenguado	1,63	2,05	0,70	2,25	6,63
Merluza	0,30	0,57	0,44	0,49	1,80
Lubina	0,59	0,57	0,30	0,59	2,05
Dorada	5,42	4,36	1,16	5,93	16,85
Atún	5,07	2,16	0,51	7,12	14,86
	34,96	27,40	8,56	29,09	100,00

Situación e interpretación:

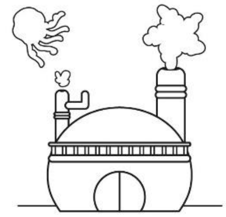
- ✓ **Gráfico 4**

n	Clases o rango	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia absoluta acumulada N_i	Frecuencia relativa f_i	Frecuencia relativa acumulada F_i
1	1,0 - 1,9	0	0	0%	0%
2	2,0 - 2,9	1	1	3%	3%
3	3,0 - 3,9	2	3	6%	9%
4	4,0 - 4,9	5	8	14%	23%
5	5,0 - 5,9	15	23	43%	66%
6	6,0 - 6,9	11	34	31%	97%
7	7.0	1	35	3%	100%

Situación e interpretación:

Ahora que ya has ejercitado y aplicado los aprendizajes básicos, lee con atención la siguiente actividad integradora y responde lo que se solicita.

En su fábrica, Charly produce una gran variedad de chocolates para vender en su colonia. La siguiente tabla muestra las especificaciones de los chocolates que se produjeron.



No. de cajas producidas	Variedad del chocolate	No. de chocolates por caja	Precio de la caja
3	Café	12	$68
1	Amargo	10	$96
2	Semi amargo	10	$96
2	Blanco	15	$72
4	Con chispas	8	$68

a) En promedio, ¿cuántos chocolates se deberían colocar en cada caja para que todas tengan la misma cantidad?

b) Si quisiéramos que todas las cajas de chocolate costaran lo mismo, ¿cuál sería el valor de la media?

c) ¿Cuál sería la mediana del total de cajas de chocolate que se produjeron en la fábrica?

d) ¿Qué sabor de chocolate representa la moda del total de cajas de chocolate que se produjeron?

e) ¿Qué valor representa la mediana de las cajas de chocolate que se produjeron?

f) ¿Existe moda en el número de cajas de chocolate que se produjeron en la fábrica? De ser así, ¿cuál sería?

g) ¿Qué precio representa la mediana de las 12 cajas de chocolate?

h) ¿Cuál de los cinco precios de las diferentes cajas de chocolate representa la moda del total de cajas?

En los ejercicios que se muestran a continuación, realiza los cálculos pertinentes para encontrar la respuesta correcta y/o describe el procedimiento que seguiste para determinar el resultado.

1. Susana decidió tomar un curso de preparación para su examen de admisión a la preparatoria. En este curso, tomó clases de estadística, cálculo, geografía e historia. Sus calificaciones finales fueron 7.4, 8.1, 6.2 y 9.6 respectivamente. ¿Cuál fue el promedio final de Susana?

A) 6.7 B) 7.6 C) 7.8 D) 8.7

2. En una campaña para la prevención de diabetes se tomaron muestras de sangre a las personas que asistieron en ayuno. Se obtuvieron los siguientes niveles de glucosa:

95, 120, 118, 87, 96, 110, 89, 93, 195, 132, 92

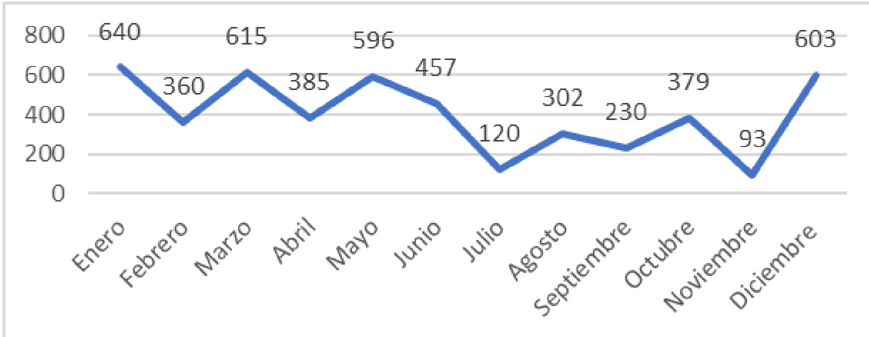
¿Cuál es la mediana de los niveles de glucosa de las personas que asistieron en ayuno a la campaña?

A) 95 B) 96 C) 110 D) 182

3. Mariana y Rolando decidieron hacer una fiesta en su último día de vacaciones. Gastaron $62 en globos, $136 en refrescos, $458 en la comida y $35 en platos y cubiertos desechables. Si los seis asistentes —contando a los organizadores— acordaron poner la misma cantidad de dinero, ¿cuánto tiene que poner a cada uno?

A) $115.16 B) $116.15 C) $125.16 D) $126.15

4. Una fábrica produjo 4,780 juguetes en un año. La gráfica muestra la cantidad de juguetes que se produjeron cada mes.



¿Cuál es el promedio de juguetes producidos por mes?

A) 398.33 B) 396.33 C) 389.33 D) 369.33

5. Cinco amigos fueron al cine y decidieron dividir el total del costo de los boletos y los dulces en partes iguales. En promedio, a cada amigo le tocó poner $85. Cuatro de ellos pusieron $100, $85, $80 y $95 respectivamente. ¿Cuánto falta para completar la cuenta y terminar de pagar las entradas y los dulces?

A) 55 B) 65 C) 75 D) 85

6. En un torneo de baloncesto, Manuel y su equipo anotaron los siguientes puntos: el primer día, 18, 3 y 12; el segundo día, 13, 12 y 12; y el tercer día, 6, 6 y 8. ¿Cuál es el valor de la mediana de los puntos que anotaron en los tres días?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 18

7. En un restaurante, durante el desayuno, la comida y la cena, los comensales piden diferentes bebidas, las cuales se reflejan en la siguiente tabla:

Desayuno		Comida		Cena	
Leche	10	Leche	2	Leche	12
Café	12	Café	10	Café	2
Té	2	Té	2	Té	3
Agua	4	Agua	12	Agua	12
Refresco	12	Refresco	12	Refresco	10

¿Cuál es la moda de las bebidas que pidieron los comensales en el restaurante durante todo el día?

A) 2 B) 4 C) 10 D) 12

8. El equipo de natación de la escuela de Juan está conformado por 15 personas, las cuales tienen las siguientes estaturas:

151, 160, 164, 151, 163, 182, 172, 159, 157, 151, 161, 163, 178, 173, 172

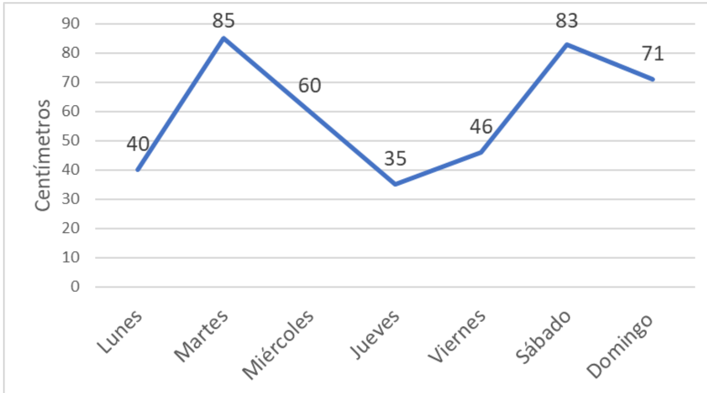
¿Cuál es la moda de las estaturas de los integrantes del equipo de natación?

A) 182 B) 172 C) 157 D) 151

9. Un ganadero tiene su rancho dividido en seis terrenos donde viven, en promedio, 48 animales por terreno. En su última inspección observó que en el primer terreno había 36 animales, en el segundo 52, en el tercero 46, en el cuarto 54 y en el quinto 48. ¿Cuántos animales hay en el sexto terreno?

A) 50 B) 52 C) 54 D) 58

10. En temporada de lluvias, el nivel del río de los Remedios incrementa hasta 120 centímetros por encima de su nivel normal. La siguiente tabla muestra el nivel del río durante la última semana.



¿En qué día el nivel del río fue equivalente al promedio de éste durante la semana?

A) Domingo B) Jueves C) Miércoles D) lunes

11. Un comerciante hizo las siguientes ventas en una semana: lunes, $450; martes, $800; miércoles, $520; jueves, $780; viernes, $840 y sábado, $910. ¿Cuál fue el promedio de las ventas de la semana?

A) $616.66 B) $716.66 C) $717.66 D) $816.66

12. En el examen final de matemáticas, el grupo de la maestra Margarita obtuvo las siguientes calificaciones: cuatro alumnos obtuvieron 7; siete obtuvieron 5; cinco obtuvieron 9 y tres obtuvieron 6. ¿Cuál es la mediana de las calificaciones que obtuvieron los alumnos de la maestra Margarita?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9

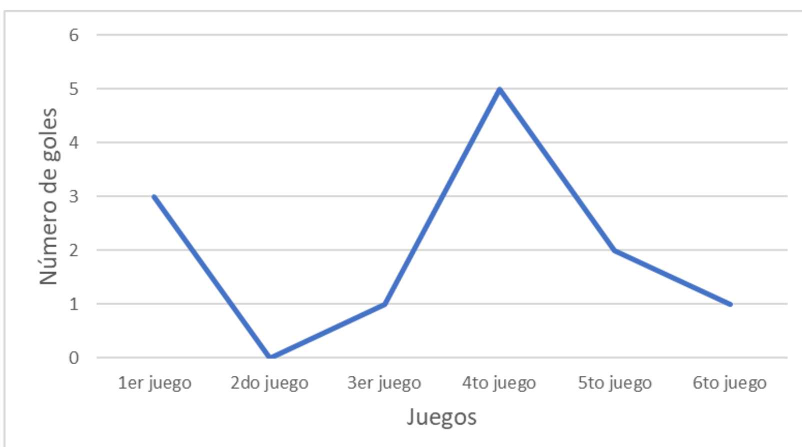
13. Diana y María decidieron jugar a lanzar dados para ver quién obtenía la mayor cantidad de puntos después de lanzar el dado cinco veces. Los puntos que obtuvo cada una después de cada lanzamiento se observan en la siguiente tabla.

Diana	María
6	3
2	6
6	2
4	6
5	6

¿Cuál es la moda de todas las veces que Diana y María lanzaron los dados?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6

14. En un torneo de futbol, un equipo de primera división participó en seis juegos. Los goles por juego se muestran en la siguiente gráfica.



En promedio, ¿cuántos goles anotó el equipo por partido?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 12

15. Luis tiene una sastrería en la cual él y sus trabajadores confeccionan, en promedio, 8 trajes por hora. El lunes pasado, confeccionaron 3 trajes en la primera hora, 7 en la segunda, 5 en la tercera, 7 en la cuarta y 10 en la quinta. Si su jornada de trabajo es de 6 horas al día, ¿cuántos trajes confeccionaron en la última hora?

A) 6 B) 7 C) 10 D) 16

16. Si un tren tarda 64 minutos en recorrer 120 kilómetros en su primer viaje, 57 minutos en el segundo y 72 minutos en el tercero, ¿cuánto tarda en promedio en recorrer la misma distancia por viaje?

A) 65.33 minutos B) 64.66 minutos C) 64.33 minutos D) 63.33 minutos

17. El papá de Daniel se dio cuenta de que su hijo pasaba mucho tiempo frente al televisor, así que decidió anotar el número de horas durante tres semanas, como se muestra en la siguiente tabla:

1ra semana		2da semana		3ra semana	
Lunes	2	Lunes	3	Lunes	6
Martes	4	Martes	4	Martes	2
Miércoles	2	Miércoles	1	Miércoles	3
Jueves	4	Jueves	5	Jueves	6
Viernes	3	Viernes	3	Viernes	4
Sábado	1	Sábado	4	Sábado	2
Domingo	2	Domingo	5	Domingo	2

¿Cuál es la moda de las horas que pasa Daniel frente al televisor?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

18. La siguiente serie numérica representa el número de cachorros por camada en el albergue municipal de perros:

3, 12, 5, 4, 6, 9, 2, 6, 10

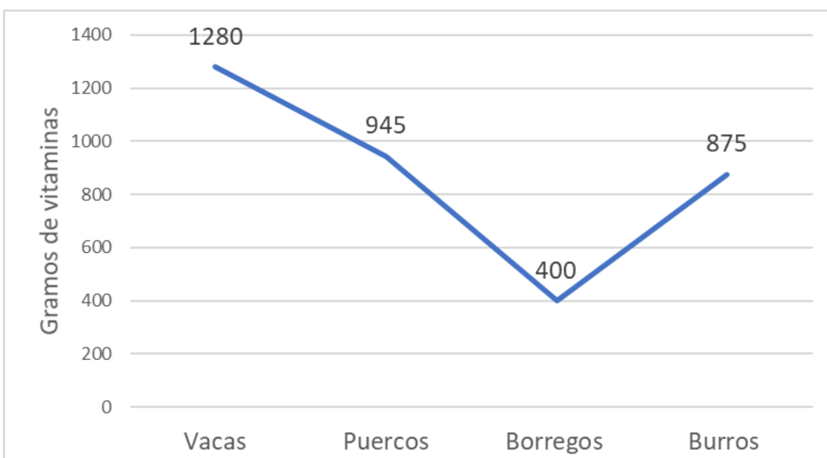
¿Cuál es la mediana de cachorros?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

19. Simón decidió comprar un refrigerador con facilidades de pago. En promedio tiene que pagar $450 cada semana durante dos meses. Hasta el momento, ha hecho siete pagos con los siguientes montos: $340, $620, $450, $210, $530, $190 y $690. ¿Cuánto le falta para terminar de pagar el refrigerador?

A) $420 B) $570 C) $620 D) $870

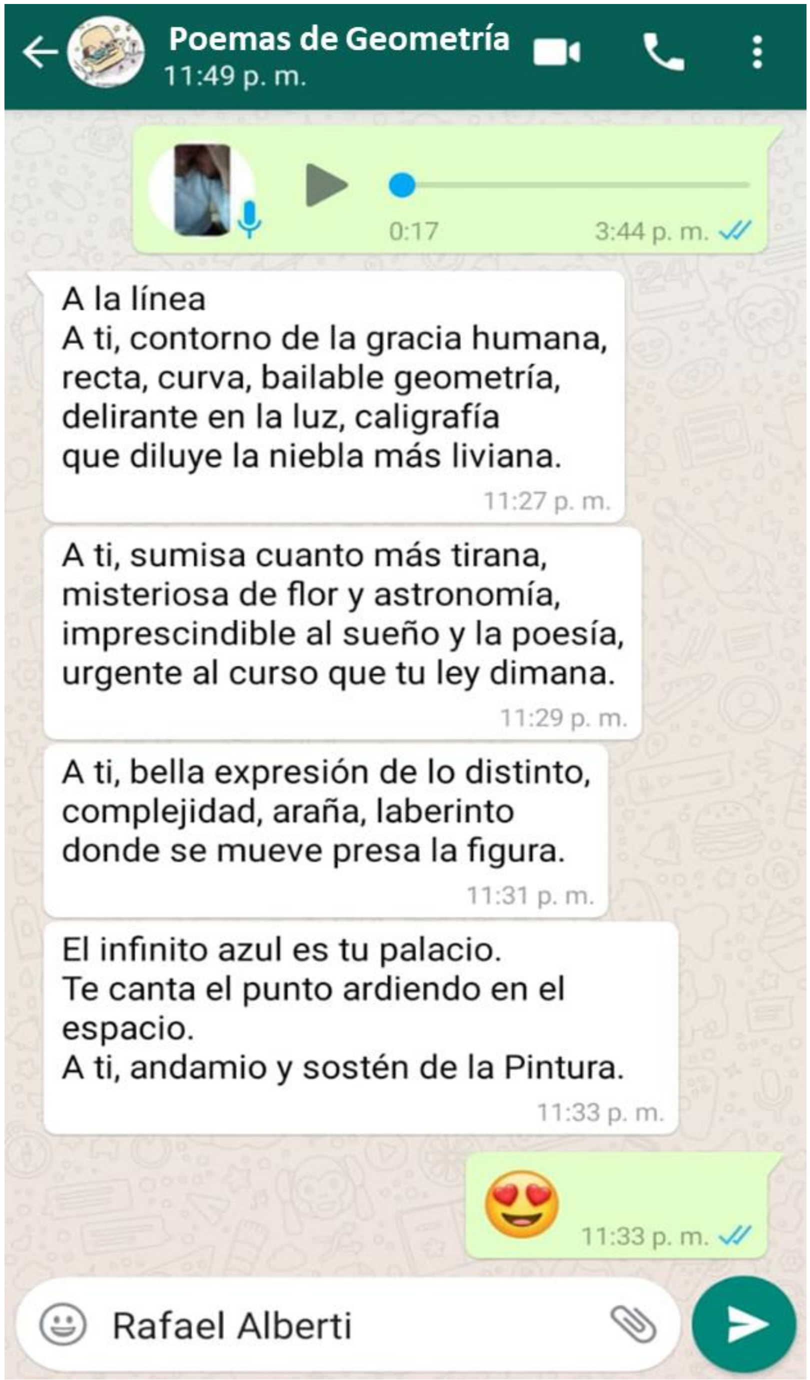
20. Un granjero compró 3,500 gramos de vitaminas para sus animales. La siguiente gráfica muestra el consumo de vitamina por grupo animal.



¿Qué especie representa el promedio del total de vitamina que compró el granjero para cada grupo animal?

A) Vacas B) Borregos C) Burros D) Puercos

IV. GEOMETRÍA

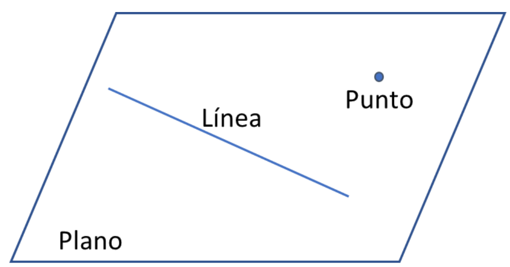


4.1. GEOMETRÍA Y LA RECTA

La geometría es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras en un plano o espacio. La definición de los términos geométricos se basa en términos indefinidos, como el ***punto***, la ***línea*** y el ***plano***.

- **El punto:** Sólo tiene posición, no dimensión. Indica una ubicación en el espacio.
- **La línea:** Es una sucesión continua de puntos que se extiende indefinidamente; tiene longitud, pero no grosor; puede ser recta, curva o una combinación de ambas.
  - **Recta:** Secuencia de puntos que se mueven en una misma dirección.
  - **Rayo:** Es parte de la recta que comienza en un punto y se extiende indefinidamente en una dirección.
  - **Segmento:** Porción de la recta comprendida entre dos puntos.
- **El plano:** Es una superficie plana capaz de contener de forma total una línea recta si ésta conecta dos puntos cualesquiera.

Término	Representación grafica
Punto	A ●
Recta	AB ⟷
Rayo	AB ⟶
Segmento	AB —



A. RECTA Y PENDIENTE

Desde la perspectiva de su definición matemática formal, se puede afirmar que la recta es un lugar geométrico cuyos puntos —los puntos que la forman— siempre cumplen con una condición: si se toman dos puntos cualesquiera de la recta, la **pendiente** que se obtiene es la misma.

La **pendiente** es la inclinación que tiene una recta con respecto el eje de las abscisas.

Se puede decir, entonces, que una característica de cualquier recta es que tiene una pendiente y con esa pendiente se puede conocer su ángulo de inclinación. De esta manera, las rectas pueden ser:

- **Horizontales.** Cualquier recta paralela al eje “x” del plano cartesiano. Su **pendiente** es **cero**.
- **Verticales.** Cualquier recta paralela al eje “y” del plano cartesiano. Su **pendiente** es **infinita**.
- **Con pendiente positiva.** Ángulo de inclinación **menor** a 90 grados con respecto al eje “x”.
- **Con pendiente negativa.** Ángulo de inclinación **mayor** a 90 grados con respecto al eje “x”.

B. DETERMINACIÓN DEL VALOR DE LA PENDIENTE A PARTIR DE SU GRÁFICA

Al graficar una función lineal $\boldsymbol{y = mx + n}$, donde "m" es la pendiente y "n" es la ordenada al origen, se puede obtener el valor de $\boldsymbol{m}$.

El valor de $\boldsymbol{m}$ también se puede obtener gráficamente al tomar dos puntos de la recta que formen un triángulo rectángulo. Los desplazamientos para formar dicho triángulo rectángulo pueden ser **verticales** (arriba +, abajo -) y **horizontales** (derecha +, izquierda -).

Al ser la función de la forma pendiente ordenada al origen, "n" tendrá valor de cero y la siguiente expresión nos permitirá conocer el valor de $\boldsymbol{m}$.

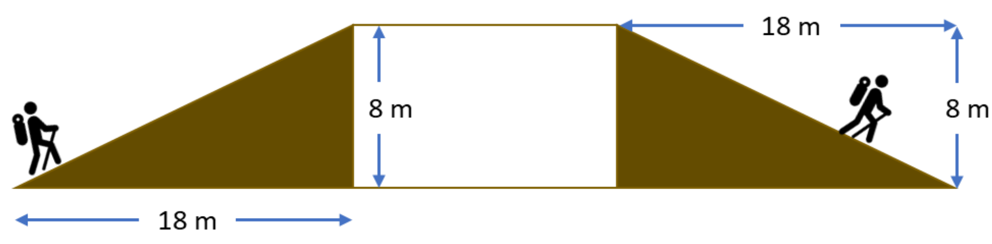
$$\boldsymbol{m = \frac{y}{x}}$$

- Si m es positiva, la recta subirá.
- Si m es negativa, la recta bajará.
- Si m es cero, la recta será horizontal.

La pendiente se puede encontrar en muchas actividades cotidianas. Por ejemplo, en la construcción se debe calcular la inclinación del piso para que el agua circule hacia la parte más baja, o del techo para evitar el estancamiento y problemas de filtración.

Ejemplos:

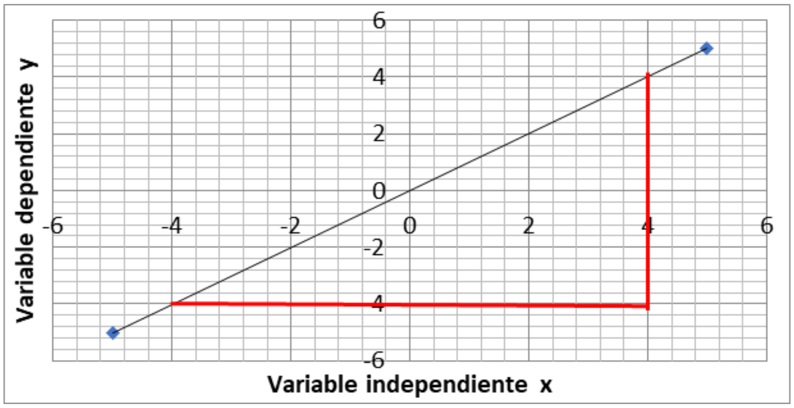
1. Una persona que practica caminata subirá una colina de 18 metros de longitud y 8 metros de altura. ¿Cuál es el grado de inclinación de la colina?



Cuando la persona suba la colina, lo hará con una pendiente positiva de $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \frac{8}{18} = 0.44$ y, cuando baje, lo hará con una pendiente negativa de -0.44.

2. En la siguiente gráfica se localizan los dos puntos que forman un triángulo rectángulo; se sustituyen los valores de los desplazamientos en la formula y se obtiene el valor de la pendiente.

$$\boldsymbol{m = \frac{8}{8} = 1}$$

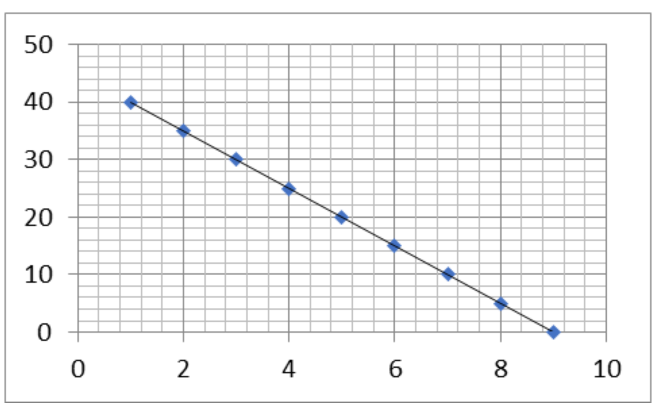


Otro método para obtener el valor de la pendiente es tomar dos puntos de la línea y aplicar la fórmula de la pendiente, que es $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.

Es muy útil saber el valor de la pendiente cuando se quiere obtener la ecuación de la recta: se toma un punto A y se sustituye en la fórmula de punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ para obtener la ecuación que define la recta.

Ejemplo

De la siguiente tabla, determinar el valor de la pendiente y la ecuación en su fórmula de pendiente ordenada.



- ✓ Tomar dos puntos de la recta, por ejemplo (2,35) y (6,15), para obtener el valor de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{15 - 35}{6 - 2} = \frac{-20}{4} = -5$$

- ✓ Posteriormente se localiza un punto A y se sustituye en la fórmula de pendiente ordenada junto con el valor de m para obtener la ecuación de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

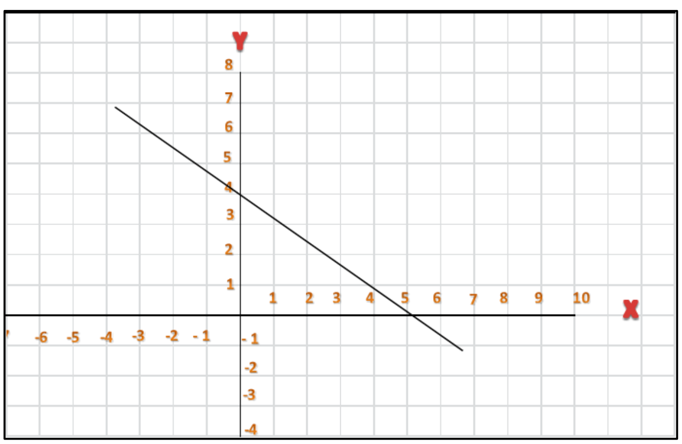
$$y - 25 = -5(x - 4)$$

$$y - 25 = -5x + 20$$

$$y = -5x + 20 + 25$$

$$\boldsymbol{y = -5x + 45}$$

Practiquemos…
Analiza la siguiente gráfica y obtén la pendiente que la representa.



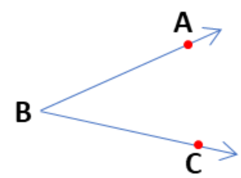
4.2. ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

A. ÁNGULOS

El ángulo es una figura formada por dos rayos (serán los lados del ángulo) con un origen común llamado vértice. Su símbolo es $\angle$ o $\measuredangle$.

El ángulo de la figura se puede representar de las siguientes formas:

$\angle A$, $\angle ABC$ Y $\angle CBA$

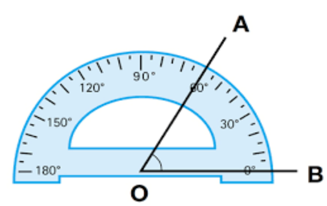


MEDICIÓN DE ÁNGULOS

El tamaño de un ángulo depende de qué tanto tenga que rotar uno de sus lados sobre su vértice para alcanzar la posición del otro lado. La magnitud que se utiliza para la medición es el grado (°). Por tanto, la medida del ángulo —o el número de grados que contiene— no se ve afectada por la longitud de sus lados.

Hay que escribir $m\angle A = 45°$ para indicar que el ángulo A mide 45 grados.

Para medir un ángulo se utiliza un transportador. El centro de éste debe coincidir con el vértice del ángulo.



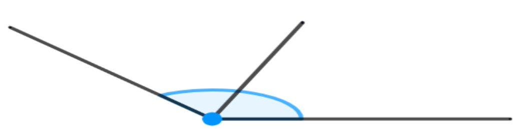
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

- **Según su medida**

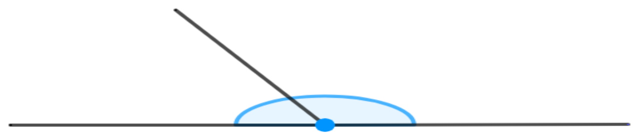
Ángulo	Medición
Agudo	Menos de 90°
Recto	Mide 90°
Obtuso	Más de 90° y menos de 180°
Llano	Mide 180°

- **Por su posición**

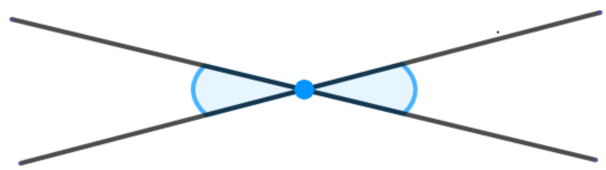
Consecutivos: Tienen en común el vértice y uno de sus lados



Adyacentes: Tienen un lado común que los separa, mientras que los otros dos lados están en una misma recta.



Opuestos por el vértice: Los lados de uno son la prolongación de los del otro.

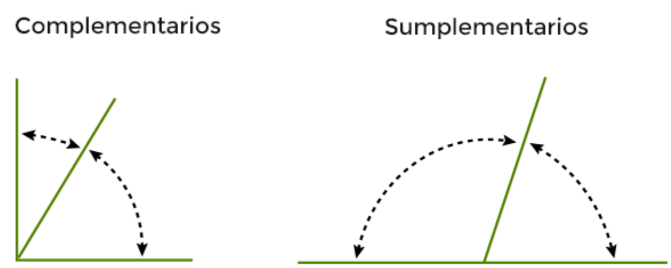


La bisectriz es un rayo o semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes. Se dice que dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida.

- **Por la suma de sus medidas**

Complementarios: La suma de sus medidas es 90°.

Suplementarios: La suma de sus medidas es 180°.



B. TRIÁNGULOS

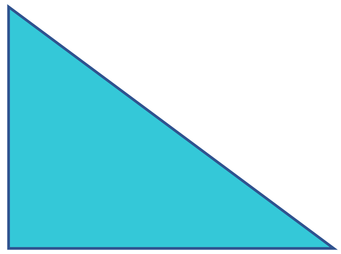
El **triángulo** es un polígono que tiene tres lados; el vértice es el punto donde se unen dos de sus lados.

Se clasifican según el número de lados iguales que tienen y los tipos de ángulo que poseen.

Por sus lados	Por sus ángulos
Equilátero: Sus tres lados son iguales.	**Acutángulo:** Sus ángulos interiores son agudos.
Isósceles: Tiene dos lados iguales.	**Rectángulo:** Tiene un ángulo interno recto.
Escaleno: No tiene lados iguales.	**Obtusángulo:** Tiene un ángulo interno obtuso.

La suma de todos los ángulos de cualquier triángulo debe ser 180°.

Ejemplo:



Triángulo:

Escaleno

Rectángulo

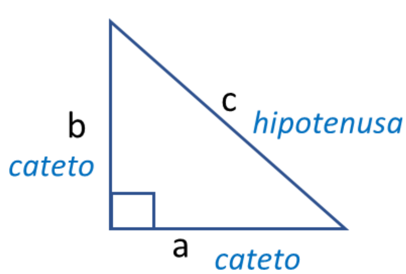
Los ángulos y los triángulos aparecen muy a menudo en la vida diaria, por ejemplo:

- Las manecillas del reloj representan diferentes tipos de ángulos según la hora.
- En los edificios, los muebles y los juegos infantiles, entre muchas otras estructuras, se pueden observar numerosos ángulos y triángulos.
- Muchas de las estrategias de juego en deportes de conjunto, como el futbol, se basan en triangulaciones con diferentes ángulos.
- Hay muchos objetos de la vida cotidiana en donde es posible identificarlos, como tijeras, paraguas, el cono de un helado, etc.

4.3. TEOREMA DE PITÁGORAS

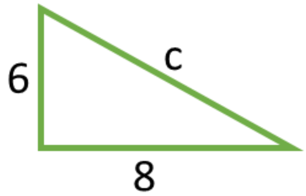
En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$



"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Ejemplo 1
Determina el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

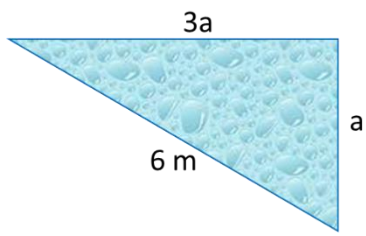
$$6^2 + 8^2 = c^2$$

$$36 + 64 = c^2$$

$$100 = c^2$$

$$\sqrt{100} = \mathrm{c} \quad ; \quad \mathbf{c = 10}$$

Ejemplo 2
Gabriel tiene una piscina triangular y quiere colocar un barandal sencillo alrededor de ella. ¿Cuántos metros de tubo necesita comprar?



1. Se sustituyen los valores en la fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + 3a^2 = 6^2\ \mathrm{m}$$

$$a^2 + 9a^2 = 36\ \mathrm{m}$$

2. Se simplifica y se despeja ***a***:

$$10a^2 = 36\ \mathrm{m}$$

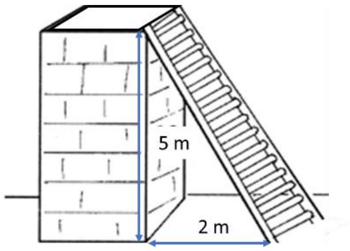
$$\mathrm{a} = \sqrt{\frac{36}{10}} = \sqrt{3.6} = 1.89$$

3. La fórmula para sacar el perímetro sería $P = a + 3a + 6$.

4. Se sustituye el valor de ***a***:
$$P = 1.89 + 3(1.89) + 6 = \boldsymbol{13.56\ metros\ de\ tubo}$$

Ejemplo 3

¿Cuánto mide la escalera?



$$b^2 = c^2 - a^2$$

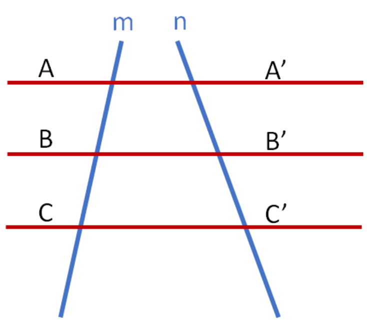
$$b^2 = 5^2 - 2^2$$

$$b^2 = 25 - 4 = 21$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{21} = 4.58\ metros}$$

4.4. TEOREMA DE TALES

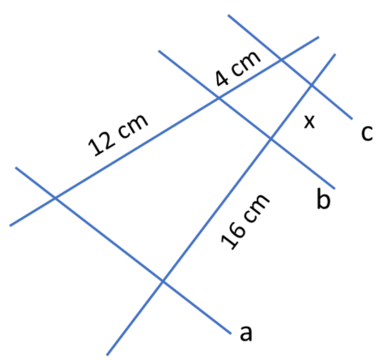
"Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos resultantes de una de las rectas son proporcionales a los segmentos de la otra".



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejemplo:

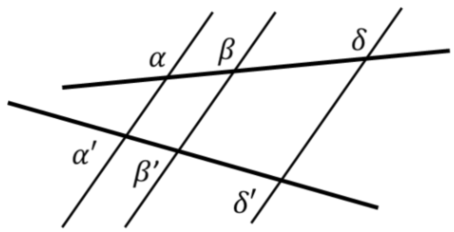
Halla el valor de *x* a partir de las tres líneas paralelas.



$$\boldsymbol{\frac{16}{12} = \frac{x}{4}} \qquad \boldsymbol{x = \frac{16\,(4)}{12} = 5.33}$$

Practiquemos…

Observa la siguiente figura y, con los datos, determina el valor de *x*.



$\overline{\alpha\ \beta}$ = 5cm

$\overline{\alpha'\ \beta'}$ = 4cm

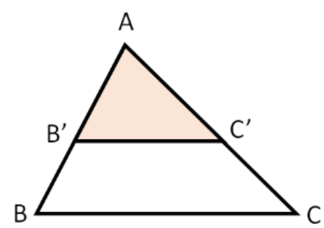
$\overline{\beta\ \delta}$ = 8cm

$\overline{\beta'\ \delta'}$ = *x*

A. PROPORCIONALIDAD DE UN TRIÁNGULO

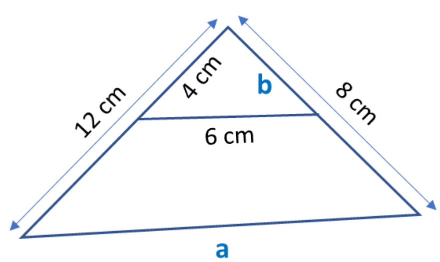
Imaginemos un triángulo ABC en el cual se traza un segmento B´C´ paralelo a uno de sus lados. Como resultado, se obtiene otro triángulo A B’C’ cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC. Por tanto, ambos triángulos son semejantes.

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}'} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AC}'} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$$



Ejemplo:

Halla el valor de a y b.



$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{6}} \qquad \textit{despejando } \boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{(6)(6)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{9}$$

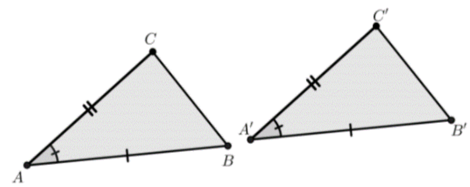
$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{b}} \qquad \textit{despejando } \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{(4)(8)}}{\mathbf{6}} = \mathbf{5.33}$$

4.5. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

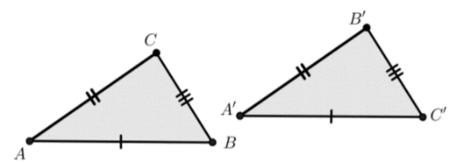
Dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma (lados y ángulos iguales) y el mismo tamaño. Se denotan con el símbolo $\cong$.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA

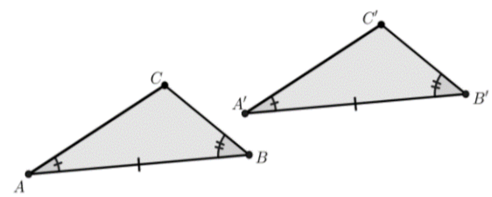
- ✓ **Primer criterio**: Dos triángulos son congruentes cuando dos de sus lados son iguales y el ángulo comprendido entre ellos también es igual. A este criterio se le llama lado-ángulo-lado (LAL).



- ✓ **Segundo criterio**: Dos triángulos con tres lados iguales son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado (LLL).

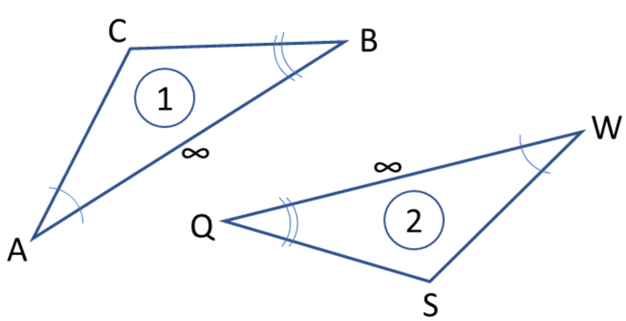


- ✓ **Tercer criterio**: Dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales son congruentes. Este criterio se conoce como ángulo-lado-ángulo (ALA).



Ejemplo

Determina qué triángulos son congruentes y cuál es el criterio que lo define.



Como $AB \cong QW$; $\measuredangle B \cong \measuredangle Q$; y $BC \cong QS$, el triángulo 1 $\cong$ triángulo 2.
Lo define el criterio LAL.

Resuelve el siguiente caso.

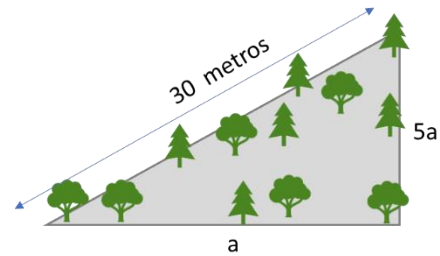
Un barco atraviesa un río cuyos márgenes son paralelos. El barco recorre un total de 4 km en línea recta y, exactamente a mitad del camino, deja caer una boya con un ancla que deberá recoger otro barco.

El segundo barco sale de la misma orilla, de un punto a 5 km del punto de partida del primero, y, navegando siempre en línea recta, recoge la boya al cabo de 4 km.

¿Cuál es la distancia total que recorre el segundo barco al atravesar el río? ¿A qué distancia del primer barco llega el segundo barco a la otra orilla?

Ahora que ya has ejercitado y aplicado los aprendizajes básicos, lee con atención la siguiente actividad integradora y responde lo que se solicita.

Debido a la tala clandestina de árboles, un poblado de Oaxaca quiere reforestar y proteger una parte de un bosque que tiene forma triangular.

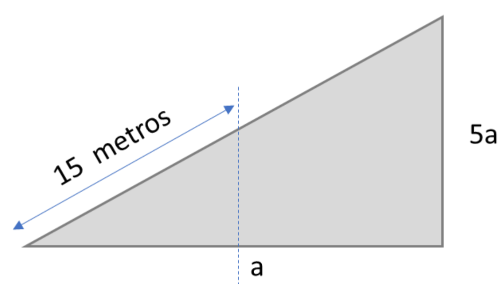


a) Para reforestar primero quieren delimitar el contorno del terreno. ¿Cuántos metros de cerca necesitarán?

b) Calcula el área total a reforestar.

c) Si se plantan dos árboles por m^2, ¿cuántos arboles plantarán al final?

d) Se dividió el terreno de la siguiente forma para plantar diferentes tipos de árboles. Determina los lados del nuevo triángulo.



e) ¿Qué tipos de ángulo forma la línea que divide el terreno?

f) Calcula el número de árboles que se plantarán en el triángulo recién formado.

g) Otro poblado quiere hacer lo mismo. Dibuja la forma que debe tener el terreno del otro poblado para que sea congruente con el terreno del poblado original.

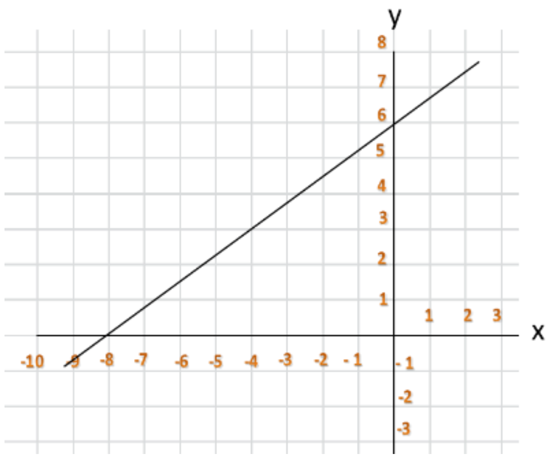
h) Explica cuál es el criterio que hace que ambos terrenos sean congruentes.

i) ¿Cuáles son los otros dos criterios por los que ambos terrenos podrían ser congruentes?

En los ejercicios que se muestran a continuación, realiza los cálculos y los trazos necesarios para encontrar la respuesta correcta. Describe el procedimiento que realizaste para determinar el resultado.

1. Analiza la siguiente gráfica y obtén la pendiente que la representa.

a) $m = 0.66$ b) $m = -0.66$ c) $m = 6.06$ d) $m = -6.06$

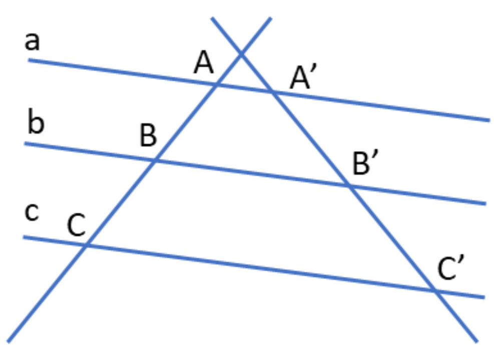


2. En un plano cartesiano se muestran los puntos (-5,3) y (4,2). Determina la distancia entre ambos.

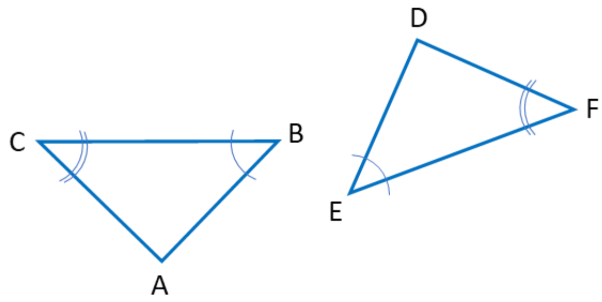
a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{90}$ c) $\sqrt{24}$ d) $\sqrt{87}$

3. Si AB=21, BC=16 y A´B´=13, halla el valor de B´C´.

a) 9.9 b) 19 c) 9 d) 19.9



4. ¿Qué información se requiere para comprobar que estos dos triángulos son congruentes por el criterio ALA?



a) La medida de los lados AB Y BC.

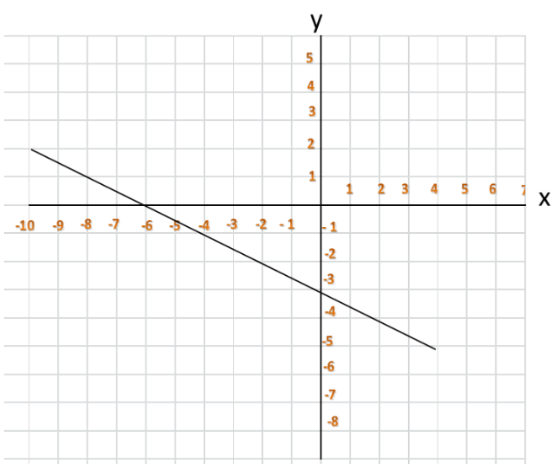
b) La medida de los ángulos faltantes.

c) La medida de los lados BC y EF.

d) La medida de los lados AC Y DF.

5. Analiza la siguiente gráfica y obtén la ecuación de la recta en su forma de pendiente ordenada al origen.

a) $y = -0.3x - 3$ b) $y = -0.5x - 3$ c) $y = -0.5x - 5$ d) $y = 0.3x - 3$

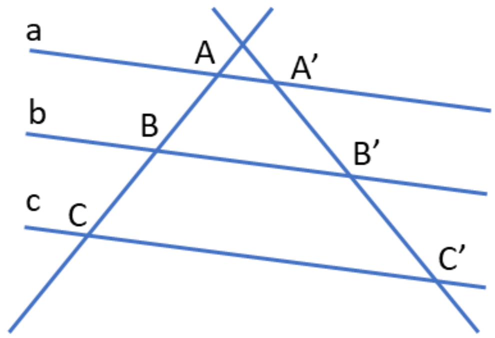


6. En un plano cartesiano se muestran los puntos (2,4) y (6,8). Determina la distancia entre ambos.

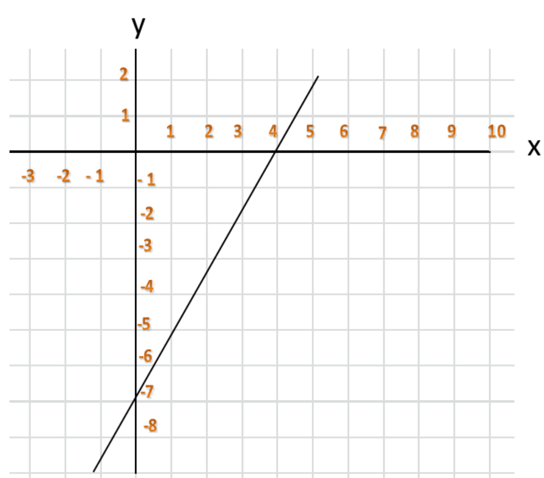
a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt{64}$

7. Si AB=20, BC=18 y B´C´ = 12, halla el valor de A´B´.

a) 33 b) 13 c) 30 d) 13.3



8. Analiza la siguiente gráfica y obtén la ecuación de la recta en su forma de pendiente ordenada al origen.



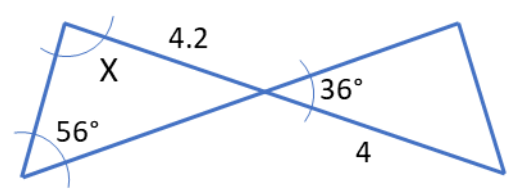
a) $y = -1.75x - 0.75$

b) $y = 1.75x - 0.75$

c) $y = -0.17x - 6.75$

d) $y = 1.75x - 6.75$

9. ¿Cuál es el valor del ángulo *x*?



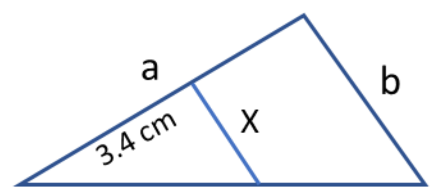
a) 56° b) 36° c) 37° d) 88°

10. ¿Qué altura tiene una portería de futbol si un jugador tira a una distancia de 12 m y el balón recorre 14 m hasta golpear la parte más alta de la portería en su parte central?

a) $\sqrt{4\,m}$ c) $\sqrt{26\,m}$ d) $\sqrt{52\,m}$ b) $\sqrt{340\,m}$

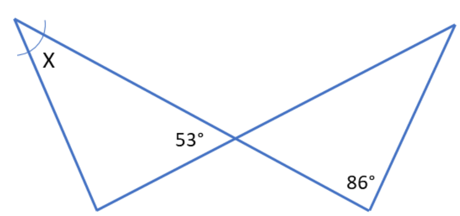
11. El lado "a" mide 7 cm y el lado "b" 5.9 cm. Calcula el valor de *x*.

a) 8.6 cm b) 2.86 cm c) 6.86 cm d) 2 cm



12. Calcula el valor del ángulo *x*.

a) 41° b) 53° c) 86° d) 45°



13. ¿Cuál es la altura de un volcán cuya base mide aproximadamente 25 km, si la distancia de la base al pico es de 13.64 km?

a) 5.1 km   b) 26 km   c) $\sqrt{26}$ km   d) $\sqrt{5}$ km

14. Utiliza el teorema de Tales para calcular el valor de *x*.

a) 8.9 cm   b) 8 cm   c) 9.8 cm   d) 9 cm